

TREBALL FINAL DE GRAU



ESCOLA
POLITÈCNICA SUPERIOR
UNIVERSITAT DE LLEIDA
INSPIRING THE FUTURE

Estudiant: Baldomà Mitjans, Pol

Titulació: Grau en Enginyeria Electrònica Industrial i Automàtica

Títol de Treball Final de Grau: Estudio de Estabilidad y Control de un Sistema Magnético de 2 GL.

Director/a: Dr. Isaac A. García

Presentació

Mes: Setembre

Any: 2020

Agradecimientos

Quisiera agradecer especialmente a mi tutor por la ayuda brindada durante el trabajo y a mi familia por todo y por haberme ayudado a superar esta pandemia.

Resumen

Este trabajo presenta el uso de la Teoría de Control del espacio de estados para el diseño de un sistema de control para una planta consistida de un sistema de electroimanes que permite un movimiento de 2 grados de libertad de un disco ferromagnético. Para obtener dicha ley se usan los métodos de la Linealización Aproximada, la Linealización Exacta y el diseño de un NLMPC. Después se muestran y comparan los resultados obtenidos mediante simulaciones en SimuLink.

Índice

Índice de figuras	5
Índice de tablas	6
1. Introducción	7
1.1. Motivación	8
1.2. Estructura del trabajo	8
2. Modelado matemático del la planta	9
2.1. Modelo Electromagnético	9
2.2. Estudio Mecánico	13
2.3. Modelo en el Espacio de Estados	17
3. Análisis del Modelo y de Estabilidad	20
4. Control mediante Linealización	23
4.1. Control Lineal: Linealización aproximada	24
4.2. Control no Lineal: Linealización Exacta	26
4.3. Discretización y salida del sistema	32
4.4. Diseño de servomecanismo para el sistema linealizado	33
5. Control Óptimo	39
5.1. Control Predictivo por Modelo no Lineal	40
5.2. Diseño de servomecanismo con NLMPC	41
6. Diseño final del sistema	46
6.1. Modelo eléctrico	47
6.2. Diseño de controlador PI para intensidades	48
6.3. Diseño de observador de estados	50
6.4. Consideraciones para el diseño	53
7. Resultados	55
7.1. Seguimiento de referencia	56
7.2. Estimación de los observadores	63
7.3. Intensidades en las bobinas	64
8. Conclusiones	67
Referencias	69
A. Fundamentos matemáticos	70
A.1. Controlabilidad y Observabilidad de Sistemas Lineales	70
A.2. Discretización de Sistemas Lineales	71
A.3. Teoría de Estabilidad de Lyapunov	71
A.4. Control Lineal: Linealización Aproximada	72

A.5. Álgebra de Lie y Distribuciones	72
A.6. Control no Lineal: Linealización exacta	73
B. Modelos Simulink	75
B.1. Modelo del control por Linealización Aproximada	75
B.2. Modelo del control por Linealización Exacta	76
B.3. Modelo del control con NLMPC	77
B.4. Modelo del control PI de intensidades	78
C. Códigos MATLAB	79
C.1. Código de diseño del controlador por Linealización Aproximada.	79
C.2. Código de diseño del controlador por Linealización Exacta. . . .	81
C.3. Código de diseño del controlador MPC.	82
C.4. Funciones para el diseño del controlador MPC	84
C.5. Código para el modelo de la planta.	90
C.6. Código de transformación de controles para el controlador por Linealización Exacta.	92
D. Ficheros Mathematica	94
D.1. Estabilidad.nb	95
D.2. LinAprox.nb	97
D.3. LinExact.nb	102

Índice de figuras

1.	Fenómenos electromagnéticos en electroimanes.	10
2.	Camino Amperiano	12
3.	Posición del disco respecto los electroimanes.	14
4.	Gráficas de \dot{x}_2 y \dot{x}_4 para $I = 1$	21
5.	Linealización del sistema.	23
6.	Valores propios de $A^{(\Delta)}$	25
7.	Esquema con transformación de control.	30
8.	Valores propios de $A^{(\theta)}$	31
9.	Modelo de servomecanismo en planta con integrador.	33
10.	Modelo de servomecanismo en planta sin integrador.	36
11.	Funcionamiento de un MPC.	40
12.	Esquema del sistema completo.	46
13.	Modelo eléctrico de la planta.	47
14.	Esquema del subsistema eléctrico.	48
15.	Esquema del subsistema eléctrico simplificado.	48
16.	Circuito del controlador PI.	49
17.	Modelo de sistema controlador-observador.	50
18.	Seguimiento de $r(t)$ por controlador diseñado con linealización aproximada.	56
19.	Error de seguimiento del controlador diseñado con linealización aproximada.	57
20.	Seguimiento de $r(t)$ por controlador diseñado con linealización exacta.	58
21.	Error de seguimiento del controlador diseñado con linealización exacta.	59
22.	Seguimiento de $r(t)$ por controlador NLMP.	60
23.	Error de seguimiento del controlador NLMP.	61
24.	Comparación del comportamiento del disco en el plano xy	62
25.	Comparación del comportamiento de los observadores.	63
26.	Comparación de las corrientes en las bobinas.	64
27.	Comparación de las tensiones en las bobinas.	65
28.	Comparación del consumo de potencia en las bobinas.	66

Índice de tablas

1.	Valores de los parámetros del sistema.	19
2.	Parámetros del controlador NLMPC.	45
3.	Parámetros del modelo eléctrico.	47
4.	Parámetros del circuito PI.	50

1. Introducción

Este trabajo trata sobre el diseño de un sistema de Control para una planta que consiste en un sistema de 3 electroimanes los cuales, mediante las corrientes que circulan por estos, controlar el movimiento de un disco en el plano xy , es decir, con 2 grados de libertad. Este sistema, modelado matemáticamente a partir de las leyes del movimiento y del magnetismo, no tiene unas ecuaciones dinámicas lineales. Durante el grado, se ha estudiado la Teoría de Control de Sistemas lineales a partir de técnicas en el dominio de la frecuencia, es decir, de la Teoría del Control Clásico, con el diseño de controladores de retardo y adelanto, PID, etc. Esta vez se pretende trabajar en el dominio temporal a través de la Teoría del Control en el Espacio de Estados.

Esta teoría se basa en obtener representaciones de un sistema físico a partir de un conjunto de variables de entrada, estado y salida, expresados en un conjunto de ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias de primer orden. Las variables de estado son variables de valor dependiente del tiempo cuyo valor en un cierto instante depende en parte del valor de las variables de estado del sistema y de las entradas que se le introduzcan, y las salidas dependen de dichas variables de estado. Esta teoría tiene la ventaja de simplificar mucho la tarea de diseñar leyes de control en sistemas con múltiples entradas y salidas (MIMO). Una vez obtenida una representación del sistema en el espacio de estados, es decir, como un sistema de ecuaciones diferenciales, se pretenden obtener leyes de control a través de 2 estrategias: la linealización y el control óptimo.

La linealización es un concepto el cual ya es conocido en la teoría del control clásico, el cual consiste, conceptualmente, en obtener un modelo lineal de un sistema no lineal, tal que la aplicación de técnicas del control lineal tengan el mismo efecto en el sistema original dentro de una cierta región en el dominio del espacio de estados. Existe más de un modo de obtener un modelo lineal del sistema, en este trabajo 2 métodos serán presentados: la linealización aproximada, también usada en control clásico, pero esta vez en el dominio temporal y con múltiples ecuaciones diferenciales; el otro método es la linealización exacta, un método exclusivo del espacio de estados el cual pretende obtener, de manera más compleja, un modelo lineal que abarque un rango de similitud con el modelo original mucho mayor.

El control óptimo es una rama de la teoría de control que mezcla la teoría de la optimización con la teoría del espacio de estados. Obtenido un modelo del sistema, se define un *índice de actuación* o funcional de actuación, el cual es una función que define el *coste* que supone que las variables del espacio de estado evolucionen de una manera determinada. Así, los valores que deben tomar las variables de control con tal de minimizar la función de costes son calculadas planteando lo anterior como un problema de optimización numérica. En el trabajo se presenta un tipo de controlador que lleva a la práctica esta teoría, el controlador *NLMPC (Non Linear Model Predictive Controller)*.

Luego de crear las leyes de control, se dispone a ampliar el trabajo añadiendo 2 complementos: un controlador analógico para las intensidades basado en el control clásico, y el diseño de 2 observadores, los cuales son subsistemas basados en el modelo en el espacio de estados de nuestro sistema que permiten obtener el valor de todos o algunos estados del sistema en caso que se requieran y no estén disponibles. También se comentan ciertos aspectos que influirían en la construcción de este sistema a la práctica.

1.1. Motivación

La razón por la elección de este trabajo es principalmente para extender el conocimiento en la Teoría Matemática del Control. El diseño de un control para un sistema de electroimanes que permitan movimiento de un objeto magnetizado en el plano con 2 grados de libertad tiene como ventaja el poder eliminar las fricciones cuando se requiere ejercer de movimientos de alta precisión, como por ejemplo en fotolitografía para el fabricado de circuitos integrados. Sin embargo, el atractivo que ha decantado la elección de este sistema es su mayor complejidad, lo cual nos incita u obliga a usar métodos de control más allá de los convencionales en la industria y que más se han trabajado durante la carrera. Además se eligen 3 métodos con los cuales llegar a controlar el sistema, lo cual surge del interés de conocer las ventajas y desventajas de usar cada una de las estrategias. También ha sido ocasión para probar las capacidades de programas como MATLAB o Mathematica para la tarea de diseño.

1.2. Estructura del trabajo

El trabajo se divide en 3 partes principales. La primera sección consiste de las secciones 2 y 3, las cuales abarcan el modelado matemático del sistema a partir de las leyes de Newton y de Maxwell, y de manera breve una revisión de la estabilidad en nuestro entorno de trabajo. La segunda parte contiene las secciones 4, 5 y 6, y abarcan el diseño de los controladores, tanto por linealización como por control óptimo, y el añadido de componentes adicionales al sistema, como controladores PI y observadores. Además se comentan algunos aspectos que se tendrían que tener en cuenta para el diseño real del sistema. Finalmente, la tercera parte, que corresponde a las secciones 7 y 8, contiene los resultados de poner a prueba en simulaciones a los sistemas de control y las conclusiones del trabajo. También se disponen de 3 apéndices los cuales contienen los fundamentos matemáticos sobre teoría de control usados durante el trabajo, y los códigos MATLAB y Mathematica desarrollados para el trabajo.

2. Modelado matemático del la planta

En esta sección se presentará una modelación matemática de la planta a estudiar. El objetivo final de esta será el de encontrar el modelo en espacio de estados del sistema. Al estar regido por las leyes del movimiento de Newton, estas vendrán dadas a partir del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= f_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}, I_1, I_2, I_3) \\ \ddot{y} &= f_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}, I_1, I_2, I_3).\end{aligned}$$

En nuestro modelo no se tomarán en consideración las fricciones de nuestro disco con ninguna superficie ni con ningún fluido; las únicas fuerzas que van a tenerse en consideración van a ser las equivalentes generadas por los 3 electroimanes, por lo que el sistema queda simplificado a:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} F_x(x, y, I_1, I_2, I_3), \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} F_y(x, y, I_1, I_2, I_3),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde m es la masa del disco ferromagnético, \vec{F} es la fuerza resultante generada por los 3 electroimanes y I_i son las intensidades que circulan por los respectivos bobinados, para $i = 1, 2, 3$.

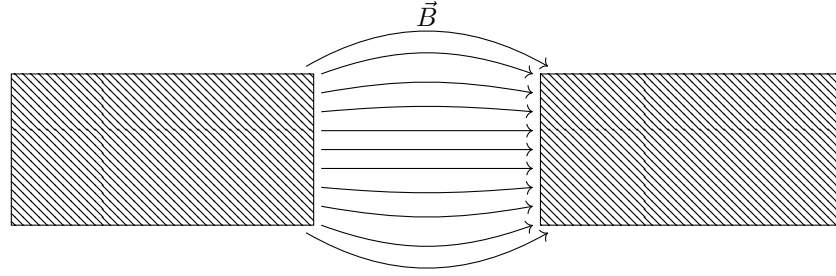
Debido a que para llevarse a cabo todo el procedimiento de deducción del modelo se requiere entrar tanto en análisis vectorial, como en electromagnetismo como en teoría de control, y como método de estructuración, el desarrollo del modelo será llevado a cabo en las siguientes subsecciones:

- Estudio del modelo electromagnético del sistema.
- Estudio de la dinámica de posiciones del sistema.
- Definición final del modelo dinámico del sistema en el espacio de estados.

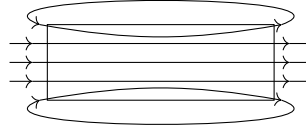
2.1. Modelo Electromagnético

Esta demostración puede ser encontrada en [1]. La obtención de un modelo electromagnético de la fuerza equivalente ejercida simultáneamente por los tres electroimanes, por lo general, no puede ser resultado de aplicar el método de superposición con las fuerzas ejercidas individualmente por cada uno de los 3 electroimanes. Esto es debido al *fringing*, un fenómeno que corresponde a la dispersión de las líneas del campo magnético producido por el electroimán, por ejemplo, cuando estas pasan por un medio con diferente permeabilidad magnética.

Realizar una aproximación por superposición de las fuerzas generadas por los 3 electroimanes sólo dará buenos resultados en caso que el fenómeno del *fringing* no sea pronunciado, esto es, en regiones cercanas al núcleo. Para realizar el modelado del sistema, supondremos que en nuestra región de trabajo



(a) *Fringing.*



(b) Fuga de flujo.

Figura 1: Fenómenos electromagnéticos en electroimanes.

no se produce *fringing*. Por tanto, la primera suposición de esta demostración será que el efecto del *fringing* es negligible. Otro fenómeno a tener en cuenta es la fuga de flujo, ya que no todo el flujo saliente del núcleo de los electroimanes llega hasta el núcleo del disco. Se tendrá como suposición también que la fuga de flujo es negligible. Dicho esto se puede pasar a la formulación del modelo.

El método para encontrar la fuerza \vec{F}_m de un solo electroimán es el del gradiente de la energía magnética, esto es, encontrar la energía magnética W_m del sistema y seguidamente calcular el gradiente de esta, vease [2]. Esto se puede expresar como

$$\vec{F}_m = \nabla W_m. \quad (2.2)$$

Este método solo es estrictamente válido si la corriente que circula por las bobinas es constante. Aunque es evidente que esto realmente no sucede en nuestro sistema, se puede tomar como una buena aproximación si la corriente, aún no siendo constante, tiene una etapa transitoria poco prolongada en el tiempo. Por tanto, el objetivo ahora mismo es el de encontrar la energía magnética del sistema. Esta viene dada por

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dv, \quad (2.3)$$

donde \vec{B} es la densidad de flujo magnético y \vec{H} es el campo magnético. Estas dos magnitudes, en el caso que en los núcleos ferromagnéticos de los electroimanes

no se produzca saturación magnética, cumplen la relación lineal

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.4)$$

donde μ es la permeabilidad del nucleo ferromagnético. Sustituyendo (2.4) en (2.3) obtenemos

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu} B^2 dv. \quad (2.5)$$

Ahora nuestro objetivo es encontrar la densidad del flujo magnético. La Ley de Gauss del magnetismo relaciona la densidad del flujo magnético con el propio flujo magnético Φ . Para simplificar, se puede asumir que el módulo del flujo magnético es uniforme en toda la superficie, de modo que

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \vec{B} d\vec{s} \\ &= BA, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde B es la magnitud de la densidad de flujo magnético y A es la sección frontal del núcleo ferromagnético del imán. Sabiendo el valor en magnitud de la densidad de flujo magnético, tenemos que

$$\vec{B} = B \hat{r}_z, \quad (2.7)$$

donde \hat{r}_z es la orientación de B . A partir de esta igualdad, se puede determinar que los flujos \vec{B}_1 , \vec{B}_2 y \vec{B}_3 que pasan a través del núcleo ferromagnético del electroimán, el espacio de aire entre el núcleo y el disco y por el dicho disco, respectivamente, vienen dados por

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \frac{\Phi}{A_1} \hat{r}_z, \\ \vec{B}_2 &= \frac{\Phi}{A_1} \hat{r}_z, \\ \vec{B}_3 &= \frac{\Phi}{A_2} \hat{r}_z. \end{aligned} \quad (2.8)$$

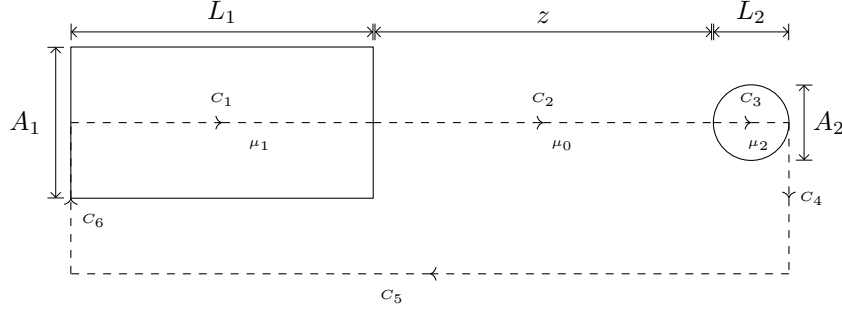


Figura 2: Camino Amperiano

En la Figura 2 se puede ver una representación de esto. Sustituyendo (2.8) en (2.5), se obtiene

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu} B^2 dv \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{V_1} \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\Phi}{A_1} \right)^2 dv + \int_{V_2} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\Phi}{A_1} \right)^2 dv + \int_{V_3} \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\Phi}{A_2} \right)^2 dv \right] \\
&= \frac{\Phi^2}{2} \left[\frac{1}{\mu_1 A_1^2} \int_{V_1} dv + \frac{1}{\mu_0 A_1^2} \int_{V_2} dv + \frac{1}{\mu_2 A_2^2} \int_{V_3} dv \right] \\
&= \frac{\Phi^2}{2} \left[\frac{L_1 A_1}{\mu_1 A_1^2} + \frac{z A_1}{\mu_0 A_1^2} + \frac{L_2 A_2}{\mu_2 A_2^2} \right] \\
&= \frac{\Phi^2}{2} \left[\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{z}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right],
\end{aligned}$$

donde las secciones A_i , las longitudes L_i y z pueden verse ilustradas en la Figura 2, y μ_0 , μ_1 y μ_2 son las permeabilidades magnéticas en el vacío, del núcleo ferromagnético y del disco, respectivamente. Nótese que se ha tomado A_1 como la sección por donde pasa el flujo en el tramo de aire entre el núcleo y el disco. Esto es así debido a haber asumido que no existe *fringing* entre estas dos zonas; en caso contrario se daría que esa sección A_1 sería sustituida por $A_3 = A_3(z)$. Finalmente, solo se requiere encontrar la magnitud del flujo Φ . Para ello se puede utilizar la Ley de Ampère, la cual dicta

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{con},$$

donde I_{con} es la intensidad de corriente eléctrica contenida en el camino cerrado C por donde pasa \vec{H} . En el caso particular de una bobina, esto se puede reescribir como

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI,$$

siendo N el número de vueltas de la bobina e I la intensidad que circula por esta. Sustituyendo las relaciones (2.4) y (2.8) la anterior ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \oint_C \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot d\vec{l} \\
&= \oint_{C_1} \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \oint_{C_2} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \oint_{C_3} \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} + 0 + \oint_{C_5} \frac{1}{\mu_0} 0 \cdot d\vec{l} + 0 \\
&= \oint_{C_1} \frac{\Phi}{\mu_1 A_1} \hat{r}_z \cdot d\vec{l} + \oint_{C_2} \frac{\Phi}{\mu_0 A_1} \hat{r}_z \cdot d\vec{l} + \oint_{C_3} \frac{\Phi}{\mu_2 A_2} \hat{r}_z \cdot d\vec{l} \\
&= \Phi \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{z}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right) = NI.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos el flujo magnético en función de los parámetros del sistema y de la distancia entre el borde del electroimán y el borde del disco

$$\Phi = \frac{NI}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{z}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)}. \quad (2.9)$$

Ahora, la energía magnética del sistema queda como

$$W_m = \frac{N^2 I^2}{2 \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{z}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)}. \quad (2.10)$$

La fuerza magnética viene dado por (2.2), por lo tanto

$$\begin{aligned}
\vec{F}_m &= \nabla W_m \\
&= \frac{\partial W_m}{\partial z} \hat{r}_z \\
&= - \frac{N^2 I^2}{2 \mu_0 A_1 \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{z}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \hat{r}_z.
\end{aligned}$$

2.2. Estudio Mecánico

Obtenida la fuerza equivalente para un imán y asumiendo que se cumple la superposición se puede pasar a obtener la fuerza equivalente provocada por los tres electroimanes mediante un análisis vectorial. Las fuerzas equivalentes en cada eje son

$$\begin{aligned}
\vec{F}_x &= (F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 + F_3 \cos \theta_3) \hat{r}_x, \\
\vec{F}_y &= (F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 + F_3 \sin \theta_3) \hat{r}_y,
\end{aligned}$$

donde \vec{F}_i con $i = 1, 2, 3$ son las fuerzas generadas por cada electroimán y \hat{r}_x y \hat{r}_y los vectores unitarios del eje de coordenadas. En la siguiente imagen se muestran las fuerzas ejercidas por cada electroimán sobre el disco. Se asume que

estas fuerzas se concentran en el punto central de las caras de cada electroimán, y su expresión viene dada, como se ha calculado en apartados anteriores, por

$$\vec{F}_i = -\frac{N_i^2 I_i^2}{2\mu_0 A_1 \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{z_i}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \hat{r}_{z_i}.$$

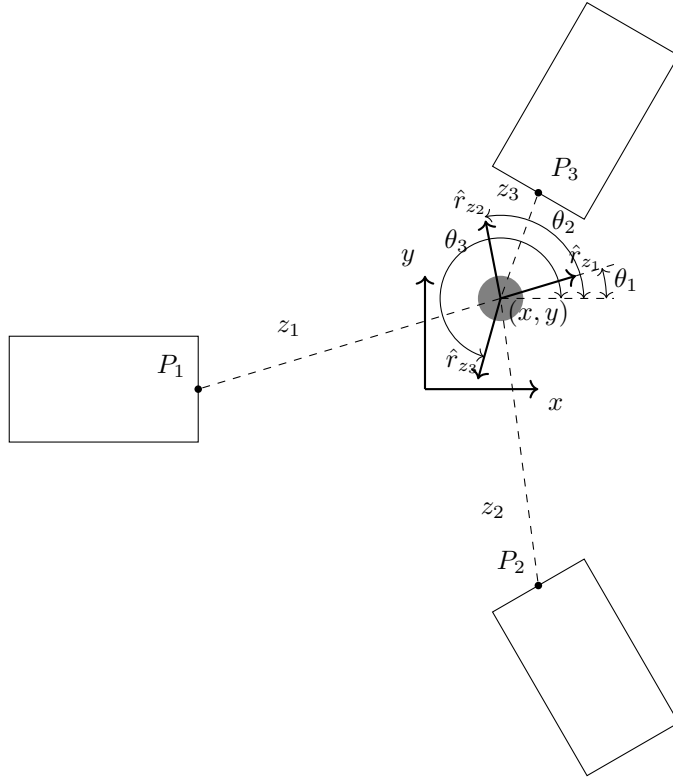


Figura 3: Posición del disco respecto los electroimanes.

El vector unitario \hat{r}_{z_i} tiene dirección opuesta al vector \vec{F}_i , y se define como

$$\hat{r}_{z_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, z_i es la distancia entre el centro de masas del disco y el punto central de las caras de los electroimanes, y se puede calcular como

$$\begin{aligned} z_i &= \|(x, y) - P_i\| \\ &= \sqrt{(x - x_{P_i})^2 + (y - y_{P_i})^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando (2.11) para $i = 1, 2, 3$, se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{(x + d)^2 + y^2}, \\ z_2 &= \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2}, \\ z_3 &= \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2}, \end{aligned}$$

donde d es la distancia entre los bordes de los electroimanes y el borde del disco cuando el centro de este se situa en $(x, y) = (0, 0)$. Con estos resultados se pueden establecer las relaciones entre los ángulos y la posición del disco respecto a los imanes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{-y}{z_1} & \cos \theta_1 &= \frac{x+d}{z_1} \\ \sin \theta_2 &= \frac{y+\frac{\sqrt{3}}{2}d}{z_2} & \cos \theta_2 &= \frac{x-\frac{d}{2}}{z_2} \\ \sin \theta_3 &= \frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}d}{z_3} & \cos \theta_3 &= \frac{x-\frac{d}{2}}{z_3} \end{aligned}$$

Finalmente, el análisis vectorial concluye dando como resultado las fuerzas equi-

valentes

$$F_x = -\frac{1}{2\mu_0 A_1} \left[\frac{(N_1 I_1)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x+d}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} + \right. \\ \frac{(N_2 I_2)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x-\frac{d}{2}}{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} + \\ \left. \frac{(N_3 I_3)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x-\frac{d}{2}}{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} \right] \quad (2.12)$$

$$F_y = -\frac{1}{2\mu_0 A_1} \left[\frac{(N_1 I_1)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{-y}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} + \right. \\ \frac{(N_2 I_2)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{y+\frac{\sqrt{3}}{2}d}{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} + \\ \left. \frac{(N_3 I_3)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}d}{\sqrt{(x-\frac{d}{2})^2 + (y-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} \right] \quad (2.13)$$

2.3. Modelo en el Espacio de Estados

Definiendo el espacio de estados como

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

la ecuación que rige la dinámica de nuestro sistema es

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{F_x}{m} \\ x_4 \\ \frac{F_y}{m} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Las expresiones completas de \dot{x}_2 y \dot{x}_4 son las siguientes:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2m\mu_0 A_1} \left[\frac{(N_1 I_1)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1+d)^2 + x_3^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x_1 + d}{\sqrt{(x_1 + d)^2 + x_3^2}} + \right. \\ \left. \frac{(N_2 I_2)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1 - \frac{d}{2})^2 + (x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x_1 - \frac{d}{2}}{\sqrt{(x_1 - \frac{d}{2})^2 + (x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} + \right. \\ \left. \frac{(N_3 I_3)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1 - \frac{d}{2})^2 + (x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x_1 - \frac{d}{2}}{\sqrt{(x_1 - \frac{d}{2})^2 + (x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} \right] \quad (2.16)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{2m\mu_0 A_1} \left[\frac{(N_1 I_1)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1+d)^2 + x_3^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{-x_3}{\sqrt{(x_1+d)^2 + x_3^2}} + \frac{(N_2 I_2)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}d}{\sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} + \frac{(N_3 I_3)^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2} \frac{x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}d}{\sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}} \right] \quad (2.17)$$

Para compactar el modelo en el espacio de estados, se definen las funciones ϕ_i para $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_3) &= \frac{N_1^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1+d)^2 + x_3^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2 \sqrt{(x_1+d)^2 + x_3^2}}, \\ \phi_2(x_1, x_3) &= \frac{N_2^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2 \sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}, \\ \phi_3(x_1, x_3) &= \frac{N_3^2}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{\sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2 \sqrt{(x_1-\frac{d}{2})^2 + (x_3-\frac{\sqrt{3}}{2}d)^2}}, \end{aligned}$$

de modo que (2.16) y (2.17) quedan simplificadas y el modelo final en el espacio estados se define como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2m\mu_0 A_1} \left[\phi_1(x_1, x_3)(x_1+d)I_1^2 + \phi_2(x_1, x_3)(x_1-\frac{d}{2})I_2^2 + \phi_3(x_1, x_3)(x_1-\frac{d}{2})I_3^2 \right], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{2m\mu_0 A_1} \left[\phi_1(x_1, x_3)(-x_3)I_1^2 + \phi_2(x_1, x_3)(x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}d)I_2^2 + \phi_3(x_1, x_3)(x_3-\frac{\sqrt{3}}{2}d)I_3^2 \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

y así da por concluido el modelado del sistema. Para el resto del trabajo, los valores de los parámetros utilizados serán los siguientes:

Parámetros		Unidades
d	0.05	m
m	0.05	Kg
A_1	0.01	m ²
A_2	$3 \cdot 10^{-4}$	m ²
μ_1	$500\mu_0$	N/A ²
μ_2	$500\mu_0$	N/A ²
L_1	0.25	m
L_2	0.03	m
N_1	250	-
N_2	250	-
N_3	250	-

Tabla 1: Valores de los parámetros del sistema.

3. Análisis del Modelo y de Estabilidad

En esta sección se abordará el estudio de la estabilidad de los equilibrios (ver Definición A.3.1) del modelo de la planta. Para ello se procederá a evaluar la estabilidad de estos según los criterios de la Teoría de Lyapunov. Estos criterios usados requieren de continuidad y derivabilidad de $\dot{x} = f(x)$ en, por lo menos, un cierto entorno de los equilibrios $x^* \in \mathbb{R}^4$. Por simple inspección se puede ver que \dot{x}_1 y \dot{x}_3 son continuas y derivables para todo x_2 y x_4 , respectivamente. En el caso de \dot{x}_2 y \dot{x}_4 , la continuidad de estas depende íntegramente de las funciones ϕ_i . Estas funciones, crean discontinuidades en \dot{x}_2 y \dot{x}_4 para los siguientes pares (x_1, x_3) :

$$\begin{aligned} &(-d, 0), \\ &\left(\frac{d}{2}, \frac{\sqrt{3}d}{2}\right), \\ &\left(\frac{d}{2}, -\frac{\sqrt{3}d}{2}\right), \end{aligned}$$

como se puede ver en la Figura 4. No interesa trabajar en zonas que presenten discontinuidades, por lo que vamos a limitar el rango de x_1, x_3 tal que no se llegue a $d/2$. Dentro de nuestra región de trabajo, los equilibrios en \mathbb{R}^4 tienen que cumplir que $x_2 = x_4 = 0$, es decir, velocidades nulas, y además son determinados también por el valor de las intensidades de las bobinas. El caso trivial en que $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ cuadra con la física del sistema, pero como se mostrará más adelante, no nos es de utilidad puesto que para ese valor de intensidades el sistema no es controlable. En caso de que las intensidades no sean nulas, los equilibrios vendrán dados por estas y por x_1 y x_3 . Si nuestro objetivo es el origen $x^* = (0, 0, 0, 0)^T$, el sistema (2.18) evaluado en este queda

$$\begin{aligned} \dot{x}_2|_{x=x^*} &= -\frac{N^2}{4m\mu_0 A_1 \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{d}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2}\right)^2} (2I_1^2 - I_2^2 - I_3^2) = 0, \\ \dot{x}_4|_{x=x^*} &= -\frac{\sqrt{3}N^2}{4m\mu_0 A_1 \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{d}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2}\right)^2} (I_2 + I_3)(I_2 - I_3) = 0. \end{aligned}$$

Este sistema resulta en un equilibrio en 4 casos:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 = I_3, \\ I_1 &= -I_2 = I_3, \\ I_1 &= I_2 = -I_3, \\ I_1 &= -I_2 = -I_3. \end{aligned}$$

A efectos prácticos, estos 4 casos son equivalentes entre ellos, ya que las intensidades aparecen elevadas al cuadrado en nuestras ecuaciones en el espacio de estados, por lo que se concluye que el punto x^* es un *equilibrio* del sistema

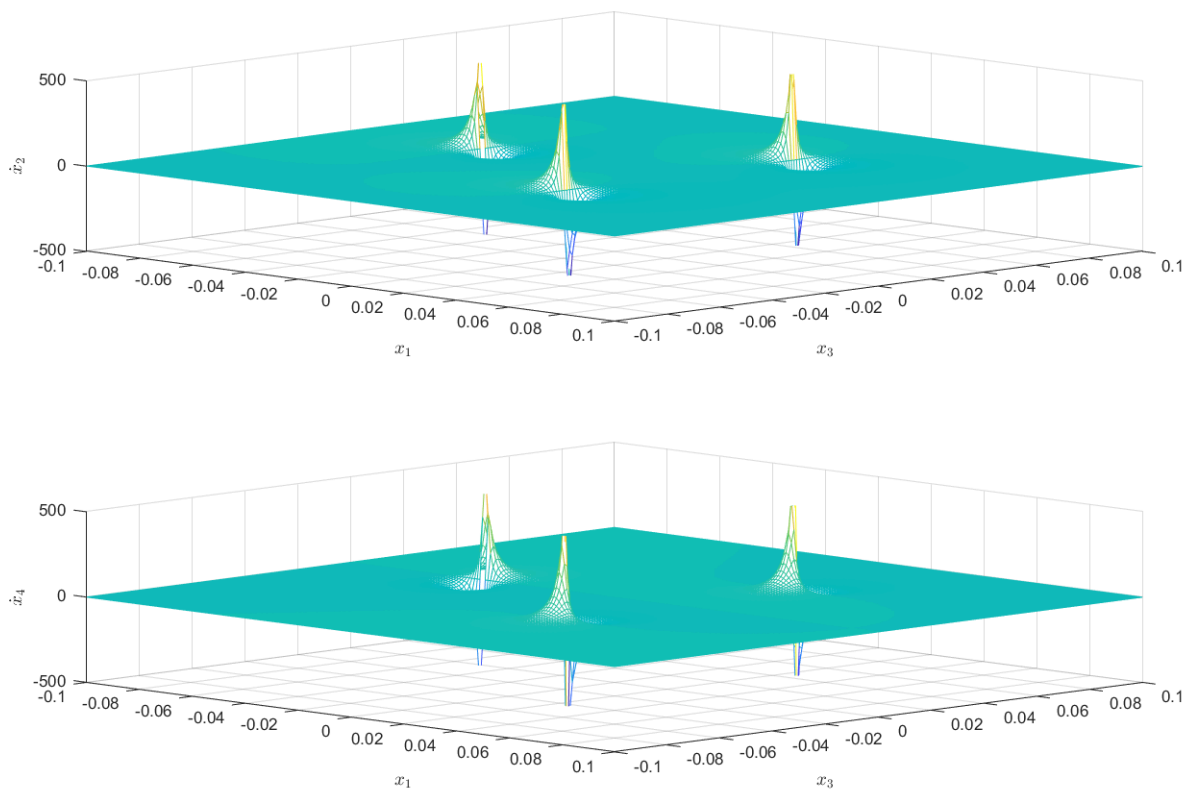


Figura 4: Gráficas de \dot{x}_2 y \dot{x}_4 para $I = 1$.

(2.18) para $I_1 = I_2 = I_3 = \mathcal{I}$.

Tomando \mathcal{I} como un parámetro del sistema, el siguiente paso consiste en determinar el tipo de estabilidad según la Definición A.3.2. Para ello se usará el Primer Método de Lyapunov. Puesto que el lugar de estudio es el origen, se puede aplicar una linealización entorno de este, y mediante el Teorema A.3.3 comprobar si este es estable para la linealización del sistema, y según el Teorema A.3.5, encontrar el tipo de estabilidad en la linealización nos dirá la del origen en el sistema no lineal original. Cabe remarcar que esto es de utilidad al ser nuestro sistema 2.18 un sistema autónomo, es decir, del tipo

$$\dot{x} = f(x),$$

sin dependencia explícita del tiempo. La matriz Jacobiana de f se define como

$$Df(x^*) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} \end{array} \right) \bigg|_{x=x^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d_{4,3} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$d_{2,1} = -\frac{N^2 \mathcal{I}^2}{4dm\mu_0 A_1} \frac{3 \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} - \frac{d}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{d}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^3},$$

$$d_{4,3} = \frac{N^2 \mathcal{I}^2}{4dm\mu_0 A_1} \frac{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{7d}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)}{\left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{d}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^3}.$$

Los valores propios λ_k de $Df(x^*)$ son

$$\lambda_1 = -i \frac{A_2 N \mu_1 \mu_2 \sqrt{3A_1 \mu_0 (A_1 A_2 \mu_0 \mu_1 + A_2 L_1 \mu_0 \mu_2 - A_2 d \mu_1 \mu_2)}}{2\sqrt{dm(A_1 A_2 \mu_0 \mu_1 + A_2 L_1 \mu_0 \mu_2 + A_2 d \mu_1 \mu_2)^3}} \mathcal{I},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1,$$

$$\lambda_3 = -\frac{A_2 N \mu_1 \mu_2 \sqrt{A_1 \mu_0 (A_1 A_2 \mu_0 \mu_1 + A_2 L_1 \mu_0 \mu_2 + 7A_2 d \mu_1 \mu_2)}}{2\sqrt{dm(A_1 A_2 \mu_0 \mu_1 + A_2 L_1 \mu_0 \mu_2 + A_2 d \mu_1 \mu_2)^3}} \mathcal{I},$$

$$\lambda_4 = -\lambda_3,$$

siendo i la unidad imaginaria y $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Por simple inspección, se puede ver que tomando cualquier valor de $\mathcal{I} \neq 0$, tendremos al menos un valor propio real positivo, bien sea λ_3 o λ_4 , por lo que se concluye que el origen del sistema lineal y el del sistema no lineal es inestable.

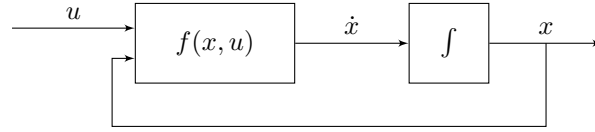
4. Control mediante Linealización

Es esta sección se plantea diseñar leyes de control mediante la linealización de la planta. Esto es, a partir de diferentes métodos, pasa de nuestro sistema no lineal original a un sistema lineal invariante en el tiempo, como se ve en la Figura 5

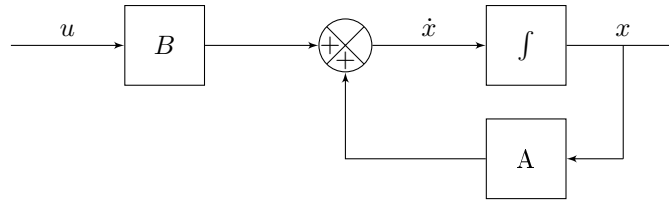
$$\dot{x} = f(x, u) \longrightarrow \dot{x} = Ax + Bu,$$

siendo $u \in \mathbb{R}^m$ las variables de control.

En nuestro trabajo se utilizan 2 métodos para satisfacer dicho propósito: la Linealización Aproximada y la Linealización Exacta. Una vez se ha linealizado el sistema, en él se pueden usar la teoría del control lineal en el espacio de estados para obtener leyes de control para crear un regulador o un servomecanismo. Las definiciones de los dos términos anteriores serán explicadas en secciones posteriores. Una diferencia entre los dos métodos de linealización que presentamos son el rango de trabajo que permiten los modelos obtenidos de aplicar dichos métodos, lo que está directamente relacionado con la dificultad de aplicación de cada uno, y el coste de implementación en la práctica.



(a) Sistema Original



(b) Sistema Linealizado

Figura 5: Linealización del sistema.

4.1. Control Lineal: Linealización aproximada

El primer método para encontrar una ley de control que estabilice nuestro sistema es mediante la Linealización Aproximada. Al igual que en la sección de estabilidad, se formula mediante un desarrollo de Taylor truncado a una aproximación lineal del sistema (2.18), pero tomando en cuenta esta vez las intensidades, las cuales son ahora las variables de control del sistema. Tomamos como variables de control los cuadrados de las intensidades

$$u(t) = \begin{pmatrix} I_1^2(t) \\ I_2^2(t) \\ I_3^2(t) \end{pmatrix}.$$

Tomando estas variables como controles y no las intensidades por si mismas ha proporcionado mucha mayor estabilidad al sistema, como se verá en secciones posteriores. El equilibrio en x^* se mantiene para el mismo valor de los 3 controles, por lo que definimos

$$u^* = (\mathcal{I}_u, \mathcal{I}_u, \mathcal{I}_u)^T \quad (4.1)$$

La matriz $D_x f(x^*, u^*)$ es la misma que (3.1) sustituyendo $\mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{I}_u$, mientras que $D_u f(x^*, u^*)$ es

$$D_u f(x^*, u^*) = K_d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

con

$$K_d = -\frac{N^2}{2m\mu_0 A_1 \left(\frac{L_1}{\mu_1 A_1} + \frac{d}{\mu_0 A_1} + \frac{L_2}{\mu_2 A_2} \right)^2}.$$

Definiendo $\Delta x = x - (0, 0, 0, 0)^T$ y $\Delta u = u - (\mathcal{I}_u, \mathcal{I}_u, \mathcal{I}_u)^T$, la linealización del sistema queda definida como el sistema lineal

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= D_x f(x^*, u^*) \Delta x + D_u f(x^*, u^*) \Delta u \\ &= A^{(\Delta)} x + B^{(\Delta)} \Delta u. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para poder establecer una ley de control en el sistema linealizado, se requerirá comprobar su controlabilidad según el Teorema A.1.2. El rango de la matriz de controlabilidad es calculado en el fichero `LinAprox.nb`, y se llega a que $\text{rank}(U) = n = 4$. Esto implica que se puede establecer una ley de control por realimentación $\Delta u(t) = -Kx(t)$, con $K \in \mathcal{M}_{m \times n}$, tal que estabilice el origen del sistema lineal y del no lineal (ver Teorema A.4.2). Una vez obtenida la ley de control $\Delta u(t)$, la ley que va a aplicarse sobre el sistema original es

$$u(t) = \Delta u(t) + (\mathcal{I}_u, \mathcal{I}_u, \mathcal{I}_u)^T.$$

Gracias al vector de constantes u^* , se puede imponer un valor de intensidades continuas permanentes tal que el valor de $u(t)$ nunca sea negativo, lo que es de necesidad, puesto que valores de u negativos implicaría intensidades complejas. En nuestro caso tomamos $\mathcal{I}_u = 1/\sqrt{2}$.

También debe observarse que, como se muestra en la Figura 6 y como se podía prever por la estructura de los valores propios calculados en la anterior sección, este modelo aproximado no tiene ningún polo en el origen tomando los valores de la Tabla 1, por lo que, para el propósito de crear un servomecanismo para este sistema, se tendrá que añadir un integrador al sistema; esto será explicado con más detalle en el diseño del servomecanismo para esta aproximación.

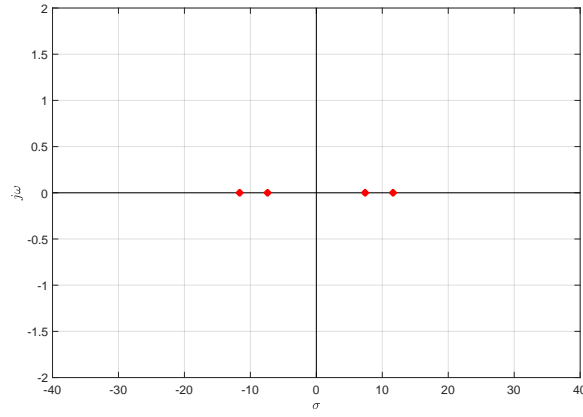


Figura 6: Valores propios de $A^{(\Delta)}$.

4.2. Control no Lineal: Linealización Exacta

El método de la Linealización Exacta permite establecer leyes de control para rangos mucho mayores que la Linealización Aproximada en sistemas con alto comportamiento no lineal. La idea básica es la de transformar el sistema no lineal en un sistema lineal mediante una transformación en las variables de control. Estas transformaciones, en la práctica, pueden venir dadas por leyes específicas para cada sistema al que se le aplique este método, debido a la infinidad de posibilidades y de tipos de no linealidades que uno puede encontrar en un sistema arbitrario. Sin embargo, hay una teoría desarrollada en torno de un tipo específico de sistemas no lineales, los llamados *sistemas afines* o sistemas lineales respecto a los controles, los cuales son de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

tal y como se definen en (A.13). Para estos sistemas se puede encontrar, si se cumplen ciertas condiciones, una transformación que los convierta en sistemas lineales o parcialmente lineales con un cierto cambio de coordenadas. El procedimiento varía en función de si el sistema tiene o no una salida definida, aunque los resultados pueden coincidir. En caso que se tenga una salida definida, el primer paso sería obtener el grado relativo del sistema (vector grado relativo para sistemas MIMO (A.6.2)), y si se cumplen ciertas condiciones se puede aplicar una linealización parcial del sistema entre la entrada y la salida de este, de ahí su nombre *linealización entrada-salida*. En el caso particular de que el grado relativo absoluto sea igual al orden del sistema, y solo entonces, la linealización se convierte en una *linealización entrada-estado*. La ventaja de este caso específico es la inexistencia de *dinámica de ceros* en el sistema transformado, con lo cual no requiere estudiar si el sistema es de fase mínima o no.

En caso que no se tenga una salida definida, el objetivo sería encontrar para qué funciones de salida se puede tener un grado relativo absoluto igual al orden del sistema y por consiguiente, se puede realizar una linealización entrada-estado [3, 4, 5]. Ese es el caso que tratamos en este apartado para nuestro sistema. Nuestro objetivo es el de encontrar un difeomorfismo $x \rightarrow \theta = \Phi(x)$ y una transformación lineal $u \rightarrow v$ con

$$u(x, v) = \alpha(x) + \beta(x)v$$

tal que el sistema afín (A.13) se transforme en

$$\dot{\theta} = A^{(\theta)}\theta + B^{(\theta)}v,$$

el cual es completamente controlable. El sistema (2.18) se puede escribir como un sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^3 g_i(x)u_i \quad (4.4)$$

con $u_i = I_i^2$ y

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(d+x_1)\phi_1(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \\ 0 \\ \frac{x_3\phi_1(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \end{pmatrix},$$

$$g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\left(x_1 - \frac{d}{2}\right)\phi_2(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \\ 0 \\ -\frac{\left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right)\phi_2(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \end{pmatrix},$$

$$g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\left(x_1 - \frac{d}{2}\right)\phi_3(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \\ 0 \\ -\frac{\left(x_3 - \frac{\sqrt{3}d}{2}\right)\phi_3(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \end{pmatrix}.$$

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dicha transformación vienen dadas por los Teoremas A.6.3 y A.6.4. Cabe mencionar que estos teoremas suponen que $\text{rank}(g(x^*)) = m$, en nuestro caso $m = 3$. Es trivial ver que $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ solo puede tener rango $\text{rank}(g(x^*)) = \rho = 2 < 3$ puesto que ya tiene 2 columnas de ceros. Dado el caso, no se puede aplicar directamente los teoremas antes mencionados. Sin embargo, se puede transformar nuestro sistema (2.18) de la forma (4.4) a la forma

$$\dot{x} = f(x) + \hat{g}(x)w = f(x) + \sum_{i=1}^{\rho} \hat{g}_i(x)w_i, \quad (4.5)$$

con $f : \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\hat{g}_i : \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vectoriales, $\hat{g} : \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{n \times \rho}(\mathbb{R})$ y $n = 4$.

La condición a cumplir para poder aplicar este método es que $\text{rank}(g(x^*)) = \rho$ sea constante para todo x en un entorno de x^* , lo cual se cumple dentro de nuestro dominio. Esta idea está detallada en el Remark 5 de la página 231 de [6]. Siguiendo el método, nuestro sistema puede transformarse mediante la realimentación preliminar $u(x, w, \hat{w}) = \hat{\beta}(x)(w, \hat{w})^T$ con $w = (w_1, w_2)^T$ y $\hat{w} = w_3$. En el archivo `LinExacta.nb` se procede con el cálculo de la matriz $\hat{\beta}$ la cual se define:

$$\hat{\beta}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{\beta}_{13}(x) \\ 1 & 0 & \hat{\beta}_{23}(x) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{13}(x) &= \frac{\phi_3(x_1, x_3)}{\phi_1(x_1, x_3)} \frac{-\frac{\sqrt{3}d}{2} \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)}{\left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) (x_1 + d) + x_3 \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)}, \\ \hat{\beta}_{23}(x) &= \frac{\phi_3(x_1, x_3)}{\phi_2(x_1, x_3)} \frac{-\left(x_3 - \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) (x_1 + d) - x_3 \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)}{\left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) (x_1 + d) + x_3 \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)}, \end{aligned}$$

y los nuevos campos vectoriales

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\left(x_1 - \frac{d}{2}\right) \phi_2(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \\ 0 \\ -\frac{\left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) \phi_2(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \end{pmatrix} \\ \hat{g}_2(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\left(x_1 - \frac{d}{2}\right) \phi_3(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \\ 0 \\ -\frac{\left(x_3 - \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) \phi_3(x_1, x_3)}{2m\mu_0 A_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, con el sistema con $\rho = 2$ entradas y rango $\text{rank}(\hat{g}) = \rho = 2$, se puede proceder al método de linealización entrada-estado. El primer paso es comprobar que el sistema cumple las condiciones de controlabilidad e involutividad definidas en el Teorema A.6.4. Para nuestro sistema necesitamos construir las

distribuciones hasta $G_3(x)$. Una vez comprobado que se cumplen dichas condiciones, el siguiente paso es hallar funciones de salida tales que cumplan

$$\nabla_x h_i \equiv 0,$$

para $i = 1, 2$, con lo que se puede realizar una linealización entrada-salida de grado relativo absoluto n . En nuestro caso, 2 funciones $h_1(x)$ y $h_2(x)$ suaves arbitrarias cumplen con la condición mencionada. Por simplicidad, tomamos

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_1, \\ h_2(x) &= x_3. \end{aligned}$$

Con las salidas definidas, ahora el cambio de coordenadas $x \rightarrow \theta = \Phi(x)$ viene dado por

$$\theta = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ L_f h_1(x) \\ h_2(x) \\ L_f h_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Gracias a la elección de las salidas, el cambio de coordenadas resulta la identidad, es decir, no es requerido. La transformación lineal de controles $w \rightarrow v$ se calcula a partir de

$$w(x, v) = \alpha(x) + \beta(x)v = \hat{A}^{-1}(x)(v - b(x)),$$

En nuestro caso $b(x) = (b_i(x)) = (L_f^2 h_i(x)) = (0)$, y la matriz de desacople

$$\hat{A}(x) = \begin{pmatrix} L_{\hat{g}_1} L_f h_1(x) & L_{\hat{g}_2} L_f h_1(x) \\ L_{\hat{g}_1} L_f h_2(x) & L_{\hat{g}_2} L_f h_2(x) \end{pmatrix}.$$

Computando la matriz $\hat{A}^{-1}(x)$ y junto con la matriz $\hat{\beta}(x)$, la transformación final $u \rightarrow v$ queda

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1^2 \\ I_2^2 \\ I_3^2 \end{pmatrix} = \hat{\beta}(x) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \hat{\beta}(x) \begin{pmatrix} \hat{A}^{-1}(x) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

con

$$\hat{A}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2m\mu_0 A_1 \left(x_3 - \frac{\sqrt{3}d}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}d}{2} \left(x_1 - \frac{d}{2}\right) \phi_2(x_1, x_3)} & -\frac{2m\mu_0 A_1}{\sqrt{3}d \phi_2(x_1, x_3)} \\ -\frac{2m\mu_0 A_1 \left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}d}{2} \left(x_1 - \frac{d}{2}\right) \phi_3(x_1, x_3)} & -\frac{2m\mu_0 A_1}{\sqrt{3}d \phi_3(x_1, x_3)} \end{pmatrix}.$$

Nuestro sistema (2.18) queda entonces, tras el cambio de coordenadas (4.6) y la transformación (4.7), como

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = A^{(\theta)}\theta + B^{(\theta)}v = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ v_1 \\ \theta_4 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

en forma normal de Brunovsky, con

$$A^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

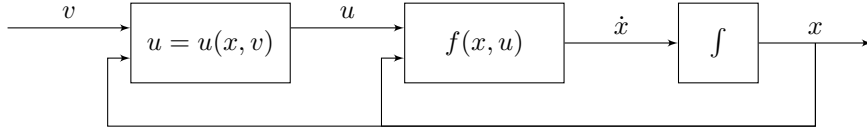


Figura 7: Esquema con transformación de control.

Nótese que la transformación que hemos creado requiere que esta dé valores siempre positivos, puesto que los controles u_i refieren al cuadrado de las intensidades I_i . Para conseguir dicho propósito, disponemos de un parámetro libre, w_3 , el cual podemos usar para asegurarnos que el valor obtenido es siempre positivo. Encontrar ese valor de manera analítica puede suponer un gran esfuerzo de cálculo. En nuestro caso la estrategia elegida es encontrar los valores numéricos máximos y mínimos que pueden alcanzar los controles en función de las variables de estado x_i y del parámetro w_3 una vez se haya obtenido una matriz K apropiada, y a partir de ahí escoger w_3 . Hemos tomado como valor $w_3 = 0.6$. El esquema final del sistema queda como en la Figura 7 , y la transformación

de controles $u = u(x, v)$ queda

$$\begin{pmatrix} I_1^2 \\ I_2^2 \\ I_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\phi_3(x_1, x_3) \frac{\sqrt{3}d}{2} \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)}{\phi_1(x_1, x_3) \left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) (x_1 + d) + x_3 \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)} w_3 \\ \frac{\frac{2m\mu_0 A_1 \left(x_3 - \frac{\sqrt{3}d}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}d}{2} \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)} v_1 - \frac{2m\mu_0 A_1}{\sqrt{3}d} v_2 - \frac{\phi_3(x_1, x_3) \left(x_3 - \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) (x_1 + d) + x_3 \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)}{\left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right) (x_1 + d) + x_3 \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)} w_3}{\phi_2(x_1, x_3)} \\ - \frac{\frac{2m\mu_0 A_1 \left(x_3 + \frac{\sqrt{3}d}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}d}{2} \left(x_1 - \frac{d}{2}\right)} v_1 + \frac{2m\mu_0 A_1}{\sqrt{3}d} v_2}{\phi_3(x_1, x_3)} + w_3 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

En este caso, los valores propios de la matriz $A^{(\theta)}$ se encuentran todos en el origen. Esto es debido a que el sistema lineal esta en forma normal de Brunovsky, y las funciones de transferencia equivalentes son del tipo $H(s) = 1/s^n$, lo que supone que no se tienen ceros y solo se tienen integradores. Esto se puede ver en la Figura 8.

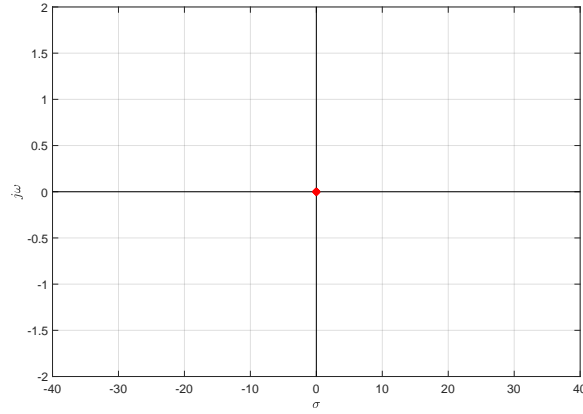


Figura 8: Valores propios de $A^{(\theta)}$.

4.3. Discretización y salida del sistema

Como paso previo al diseño de los controladores para cada sistema, hace falta percatarse de que si nuestro propósito es que estos controladores funcionen de manera digital, estos deben de regirse por leyes de control en tiempo discreto. Para ello, nuestros métodos deben aplicarse sobre modelos en el espacio de estados en tiempo discreto. Se pueden obtener modelos en tiempo discreto a partir de modelos en tiempo continuo y un cierto periodo de muestreo, el que marca la separación temporal entre muestras de las señales. Esto es, a partir de un sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

obtener el sistema discretizado

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k, \\ y_k &= C x_k + D u_k,\end{aligned}$$

donde $x_k = x(kT_s)$, $u_k = u(kT_s)$ y $y_k = y(kT_s)$, con T_s el tiempo entre valores o tiempo de muestreo. Para obtener las matrices A_d y B_d , se puede hacer uso del Teorema A.2.1, usando las matrices A y B de cada sistema. El periodo de muestreo utilizado, y que por tanto, va a ser utilizado en las simulaciones, es $T_s = 0.01$ s. Las matrices obtenidas para los 2 sistemas van a ser mostradas en el diseño de cada servomecanismo.

La matriz C es la matriz de relación de las salidas con las entradas característica de los sistemas lineales. Nuestro sistema tiene una salida $h(x)$ que afortunadamente se puede escribir como la salida de un sistema lineal

$$y = h(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Cx.$$

Para poder asegurar que las salidas siguen las referencias que se le quieren imponer, es decir, que la salida sea controlable, esta tiene su propia condición de controlabilidad (ver Teorema A.1.3). Esta se cumple para ambos sistemas.

4.4. Diseño de servomecanismo para el sistema linealizado

Una vez hemos linealizado el sistema, estamos en disposición de usar la teoría del control lineal para diseñar un controlador basándonos en la colocación de polos. En teoría de control, se la llama servomecanismo al sistema planta-controlador que es capaz de seguir una señal de referencia $r(t) \in \mathbb{R}^p$, con p el número de salidas.

No todos los sistemas por si solos tienen la capacidad de seguir cualquier referencia, al menos tal que el error en estado estacionario se vuelva cero al paso del tiempo. Esto está relacionado con el número de valores propios $\lambda = 0$ de la matriz A de un sistema lineal hablando en la teoría del control lineal en espacio de estados, o con el número de polos en el origen de la función de transferencia $H(s) = Y(s)/R(s)$ en la teoría del control clásica. Esta propiedad es llamada *tipo* del sistema, y en nuestro caso tenemos que nuestro sistema (4.3) no tiene ningún valor propio en el origen, mientras que el sistema (4.8), al estar en la forma canónica de Brunovsky, todos los valores propios están en el origen. Para cada sistema se requerirá diseñar un servosistema tal que se pueda seguir referencias del tipo escalón.

Por conveniencia, primeramente diseñaremos el servomecanismo para el sistema (4.8), el cual no requiere la adición de un integrador. La estructura de servomecanismo que necesita este sistema se puede ver en la Figura 9.

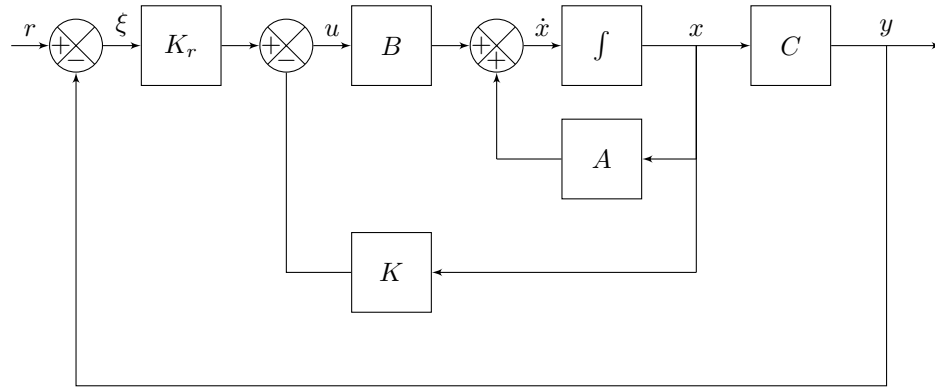


Figura 9: Modelo de servomecanismo en planta con integrador.

Para diseñar el servomecanismo con el método que usaremos, explicado en [8], primero requerimos que la salida de nuestro sistema esté en forma canónica observable, esto es en nuestro caso, que $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_3$, lo cual ya se cumple.

Gracias a esto, la ley de control v se puede escribir

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{13} \\ k_{31} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 - \theta_1 \\ r_3 - \theta_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & 0 & k_{14} \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} \end{pmatrix} \theta \\ &= K_r^{(\theta)} r - K^{(\theta)} \theta, \end{aligned}$$

tal que el sistema (4.8) se escriba

$$\dot{\theta} = A^{(\theta)} \theta + B^{(\theta)} K_r^{(\theta)} r - B^{(\theta)} K^{(\theta)} \theta. \quad (4.10)$$

La solución al problema planteado pasa por calcular primero la matriz de ganancias K tal que el error

$$e_\theta = \theta - \theta(\infty)$$

tienda a 0. El valor de θ en estado estacionario se define

$$\dot{\theta}(\infty) = A^{(\theta)} \theta(\infty) + B^{(\theta)} K_r^{(\theta)} r(\infty) - B^{(\theta)} K^{(\theta)} \theta(\infty). \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta que la referencia a seguir es un escalón, se tiene que $r(t) = r(\infty)$, por lo que restando 4.10 y 4.11 se tiene

$$\begin{aligned} (\dot{\theta} - \dot{\theta}(\infty)) &= A^{(\theta)} (\theta - \theta(\infty)) - B^{(\theta)} K^{(\theta)} (\theta - \theta(\infty)) \\ \dot{e}_\theta &= (A^{(\theta)} - B^{(\theta)} K^{(\theta)}) e_\theta \end{aligned}$$

Mediante MATLAB se pueden encontrar matrices K con tal de obtener un Regulador Lineal Cuadrático (LQR). Este regulador viene de la solución de un problema de control óptimo para el caso de un sistema lineal con un funcional cuadrático en tiempo discreto

$$J(x, u) = \sum_{k=1}^{\infty} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + x^T(k) N u(k)).$$

Sin entrar en detalles del procedimiento para solucionar el problema analíticamente, lo que necesitamos para encontrar la matriz K es definir las matrices Q , R y N , las cuales definen los costes que suponen cada una de las variables de estado y de control en el momento de calcular los valores de la matriz de ganancias. Unos valores mucho más grandes de la matriz Q que de la matriz R significaría encontrar una ley de control que priorizara robustez en la dinámica de estados que en los valores que puedan tomar los controles, y viceversa. Una ley ampliamente usada para elegir las matrices de pesos, o al menos para tomar una referencia de ellas, es la Ley de Bryson [7], que dicta

$$\begin{aligned} Q_{ii} &= \frac{1}{\bar{x}_i^2} \\ R_{ii} &= \frac{1}{\bar{u}_i^2}, \end{aligned}$$

donde \bar{x}_i y \bar{u}_i son los máximos valores aceptables de los respectivos estados y controles que deseemos. Se puede omitir la matriz N haciéndola nula. Las matrices $A_d^{(\theta)}$ y $B_d^{(\theta)}$ obtenidas al discretizar (4.8) son

$$A_d^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0100 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0.0100 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

$$B_d^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0.0100 & 0 \\ 0 & 0.0001 \\ 0 & 0.0100 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de pesos Q y R elegidas para el LQR son

$$Q = \begin{pmatrix} 1000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30000 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{pmatrix},$$

y mediante el comando `dlqr`, la matriz de ganancias obtenida es

$$K^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 42.0703 & 11.7149 & 2.624 \cdot 10^{-13} & 1.313 \cdot 10^{-14} \\ -2.399 \cdot 10^{-13} & 3.276 \cdot 10^{-14} & 42.0703 & 11.7149 \end{pmatrix}.$$

A partir de la matriz $K^{(\theta)}$ se obtiene

$$K_r^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 42.0703 & 2.624 \cdot 10^{-13} \\ -2.399 \cdot 10^{-13} & 42.0703 \end{pmatrix}.$$

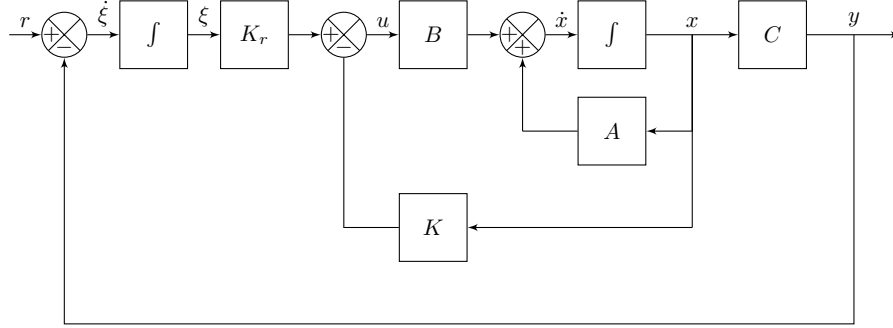


Figura 10: Modelo de servomecanismo en planta sin integrador.

Por otro lado, pasamos al diseño de un servosistema para una planta sin integrador para nuestro modelo obtenido por linealización aproximada. El método usado también está explicado en [8]. Este tipo de servomecanismo tiene la estructura que se ve en la Figura 10, con un integrador añadido. Este integrador añade estados extra al sistema, esto es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(\Delta)} & 0_{n,r} \\ -C & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{(\Delta)} \\ 0_{r,m} \end{pmatrix} \Delta u + \begin{pmatrix} 0_{n,r} \\ I_r \end{pmatrix} r, \quad (4.12)$$

siendo $0_{a,b}$ una matriz de a filas y b columnas de ceros. Definiendo los estados estacionarios

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(\Delta)} & 0_{n,r} \\ -C & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{(\Delta)} \\ 0_{r,m} \end{pmatrix} \Delta u(\infty) + \begin{pmatrix} 0_{n,r} \\ I \end{pmatrix} r(\infty).$$

y restandolos a (4.12) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi} - \dot{\xi}(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(\Delta)} & 0_{n,r} \\ -C & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x(\infty) \\ \xi - \xi(\infty) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^{(\Delta)} \\ 0_{r,m} \end{pmatrix} (\Delta u - \Delta u(\infty)). \quad (4.13)$$

Sea

$$e_{\Delta} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi} - \dot{\xi}(\infty) \end{pmatrix},$$

$$\Delta u_{e_{\Delta}} = \Delta u - \Delta u(\infty) = -\hat{K}^{(\Delta)} e_{\Delta},$$

siendo $r(t)$ un escalón y, por lo tanto, $r(t) = r(\infty)$, tenemos que (4.13) se vuelve

$$\dot{e}_{\Delta} = (\hat{A}^{(\Delta)} - \hat{B}^{(\Delta)} \hat{K}^{(\Delta)}) e_{\Delta},$$

con

$$\begin{aligned}\hat{A}^{(\Delta)} &= \begin{pmatrix} A^{(\Delta)} & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{B}^{(\Delta)} &= \begin{pmatrix} B^{(\Delta)} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{K}^{(\Delta)} &= \begin{pmatrix} K^{(\Delta)} & (-K_r^{(\Delta)}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En este punto, esto se convierte en un problema de asignación de polos, como en el caso anterior, por lo que se procede a discretizar el sistema completo con las nuevas variables integradoras. Las matrices discretizadas quedan

$$\begin{aligned}\hat{A}_d^{(\Delta)} &= \begin{pmatrix} 1.0194 & 0.0101 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.8922 & 1.0194 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0482 & 0.0102 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.7195 & 1.0482 & 0 & 0 \\ -0.0101 & -0.0001 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0102 & -0.0001 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}, \\ \hat{B}_d^{(\Delta)} &= \begin{pmatrix} -1.429 \cdot 10^{-4} & 7.146 \cdot 10^{-5} & 7.146 \cdot 10^{-5} \\ -0.0287 & 0.0143 & 0.0143 \\ 0 & -1.243 \cdot 10^{-4} & 1.243 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -0.0251 & 0.0252 \\ 4.758 \cdot 10^{-7} & -2.379 \cdot 10^{-7} & 2.379 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 4.132 \cdot 10^{-7} & -4.132 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo `dlqr` con las matrices de pesos

$$Q = \begin{pmatrix} 25000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^8 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 500 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix},$$

se obtienen las matrices de ganancias

$$K^{(\Delta)} = \begin{pmatrix} -78.2501 & -6.6966 & 6.171 \cdot 10^{-13} & 2.977 \cdot 10^{-14} \\ 39.1251 & 3.3483 & -89.7571 & -6.4235 \\ 39.1251 & 3.3483 & 89.7571 & 6.4235 \end{pmatrix},$$

$$K_r^{(\Delta)} = \begin{pmatrix} -311.9862 & 4.528 \cdot 10^{-12} \\ 155.9931 & -265.3689 \\ 155.9931 & 265.3689 \end{pmatrix}.$$

Con esto se da por finalizado el diseño de los servomecanismos, y termina la sección de implementación de sistemas de control mediante linealización.

5. Control Óptimo

El control óptimo es una estrategia de control que trata de encontrar una ley de control para un sistema dinámico a partir de las herramientas de la teoría de la optimización. Esto se traduce en tratar de minimizar (o maximizar) una función de costes F , y tomando como restricciones la ecuación de estados del sistema y ciertas condiciones de contorno. Se pretende encontrar un control $u^*(t) \in \mathbb{R}^m$ que sea un extremal del funcional

$$J(x, u) = \phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt,$$

bajo las restricciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t), \\ x(0) &= x_0, \\ g(x, u, t) &\geq 0,\end{aligned}$$

con $F \in C^2$, $\phi \in C^1$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ la trayectoria, x_0 las condiciones iniciales, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ los controles y $g(x, u, t)$ las restricciones. Aquí $u^*(t)$ es el llamado *control óptimo* y $x^*(t)$ la *trayectoria óptima*. Por lo general, a menos que se trate de un sistema lineal (con por ejemplo, un funcional cuadrático, el caso LQR usado en apartados anteriores), no se puede encontrar una solución analítica para $u^*(t)$ y $x^*(t)$; en todo caso se requiere encontrar soluciones numéricas. Popularmente, se conocen 3 familias de métodos con los que se puede resolver numéricamente un problema de control óptimo:

- Métodos Directos
- Métodos Indirectos
- Programación Dinámica

Los métodos indirectos se basan en la filosofía de *primero optimizar, después discretizar*. A partir del Principio del Máximo de Pontryagin [9], se obtienen las condiciones necesarias para que el control obtenido sea óptimo, aunque no las suficientes; estas son dadas por ciertas condiciones de convexidad que no siempre se pueden cumplir para cualquier problema. La programación dinámica, de manera análoga, se basa en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para la necesidad y la suficiencia de que el control calculado sea óptimo, aunque a diferencia de en los métodos indirectos, esta condición dada por la ecuación HJB debe cumplirse para todo el espacio de estados, y no solo para una trayectoria específica. Por último, los métodos directos, primeramente transforman el problema directamente en un problema de programación no-lineal (NLP), y a partir de este se encuentra el control óptimo, *primero discretizando y después optimizando*.

5.1. Control Predictivo por Modelo no Lineal

El Control Predictivo por Modelo es una disciplina de control derivada de la optimización de trayectorias. En esta, se resuelve un problema de control óptimo de horizonte finito de manera que se obtiene una solución de control en lazo abierto. La metodología del MPC es la de resolver continuamente problemas de control en lazo abierto durante un cierto intervalo de tiempo, para actuar como un control en lazo cerrado. Con el control calculado, este se aplica al sistema durante un periodo de tiempo el cual pasado este se muestrea la salida del sistema y se plantea el siguiente problema de control, esto se puede ver en la Figura 11. Los controladores que usan esta metodología de control, los MPC, se basan en aplicar esta teoría en modelos lineales obtenidos frecuentemente mediante procedimientos de identificación de sistemas.

En nuestro caso, no disponemos de una planta de la cual se pueda obtener información, sino de un modelo de esta no lineal. Para nuestro propósito de controlar el sistema, existe una rama de esta disciplina llamada Control Predictivo por Modelo no Lineal, la cual se basa en modelos no lineales para los cuales se tiene que solucionar el problema de control óptimo. Para aplicaciones que requieran tiempos de muestreo bajos como en nuestro caso, lo más frecuente es el uso de métodos directos para hallar la solución.

En este trabajo, se crea a partir de MATLAB[®] un MPC no lineal, o NLMPC. Primeramente se define el problema de control, y después, mediante la Model Predictive Control Toolbox de MATLAB[®], se diseña el NLMPC que posteriormente será probado en SimuLink[®].

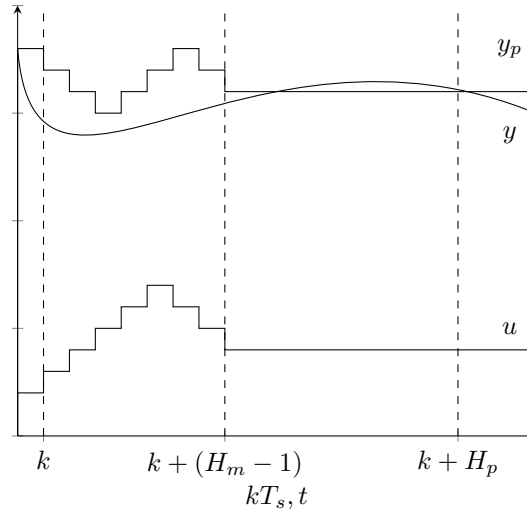


Figura 11: Funcionamiento de un MPC.

5.2. Diseño de servomecanismo con NLMPC

El sistema que queremos controlar es (2.18), tomando como variables de control

$$u(t) = (I_1^2(t), I_2^2(t), I_3^2(t))^T,$$

con función de costes y restricciones aún por definir. La Toolbox de MATLAB[®] para el diseño de nuestro MPC nos deja los siguientes conjuntos de parámetros de diseño:

- Número de estados N_x , de controles N_u y de salidas N_y .
- Periodo de muestreo T_s .
- Horizonte de predicción H_p .
- Horizonte de control H_m .
- El modelo no lineal de la planta.
- La función de salida de la planta.
- Límites en las variables.
- La adición de parámetros adicionales.
- La función de costes.
- Las restricciones de igualdad y desigualdad.
- Las matrices Jacobianas.
- El optimizador.

Primeramente definimos el número de variables de entrada, estado y salida, los cuales evidentemente son $N_x = 4$, $N_u = 3$ y $N_y = 2$. El periodo de muestreo debe ser elegido lo suficientemente grande con tal de que el NLMPC sea capaz de resolver el problema de optimización dentro de ese intervalo, pero suficientemente pequeño para que el control resulte efectivo. Con un periodo $T_s = 0.1$ se esperan obtener buenos resultados.

El horizonte de predicción define el tiempo para el que se lleva a cabo el cálculo del control a aplicar, definido como $T = H_p T_s$. El horizonte de control H_m , por su parte, define el número de muestras del horizonte de predicción H_p donde actúan las variables de control. Para las $H_p - H_m$ muestras restantes dentro del horizonte de predicción, el control permanece constante. Durante el proceso de control, solo la primera muestra de las H_p muestras es aplicada al sistema. Tomar horizontes pequeños supone menor esfuerzo de cálculo, pero menos precisión en el controlador. En nuestro caso tomamos $H_p = 10$ y $H_m = 5$.

El modelo no lineal de la planta puede introducirse como un modelo continuo o como un modelo discreto. En caso de introducir un modelo continuo, el optimizador discretiza automáticamente este [10]; en caso que se introduzca un modelo discreto, el usuario puede elegir como puede discretizarse el modelo continuo, aunque existe el riesgo de que el método de discretización de problemas al optimizador, por lo que en nuestro caso usaremos un modelo continuo. La salida del sistema puede ser definida de manera simple como se ve en C.3. El código .m de la planta puede verse en C.4.

Respecto a los límites en las variables, los cuales corresponden como conjunto de restricciones de desigualdad lineales para el optimizador, necesitamos por una parte restringir las variables de posición a nuestra zona de trabajo, en este caso

$$y_{min} = \left(-\frac{d}{2\sqrt{2}}, -\frac{d}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$y_{max} = \left(\frac{d}{2\sqrt{2}}, \frac{d}{2\sqrt{2}}\right),$$

y también imponer que nuestras variables de control sean positivas. Esto podría hacerse creando una restricción de desigualdad personalizada, pero usaremos un control mínimo

$$u_{min} = (0.001, 0.001, 0.001).$$

No es necesario limitar la velocidad del disco, y las variables de posición ya están restringidas con las salidas, por lo que no se requiere imponer límites a las variables de estado.

La función de costes suele escogerse como una función cuadrática que tenga en cuenta el seguimiento de una señal de referencia por parte de la salida o los controles, la minimización del tiempo, entre otros. El controlador NLMPC, por defecto, ofrece una función de costes de la siguiente forma:

$$J(z_k) = J_y(z_k) + J_u(z_k) + J_{\Delta u}(z_k) + J_\epsilon(z_k), \quad (5.1)$$

con

$$z_k = \left(u_{k|k}^T \quad u_{k+1|k}^T \quad \dots \quad u_{k+H_p-1|k}^T \quad \epsilon_k \right)^T,$$

donde $J_y(z_k)$ es el coste por seguimiento de referencia, $J_u(z_k)$ es el coste por seguimiento de control de referencia, $J_{\Delta u}(z_k)$ el coste por variación del control, $J_\epsilon(z_k)$ el coste por violación de restricciones, k el actual intervalo de control y z_k las variables de decisión en dicho intervalo. Dichos costes son funciones que

juntas dan el coste total del proceso de optimización. Estas se definen

$$\begin{aligned}
J_y(z_k) &= \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{H_p} \left(\frac{w_{i,j}^y}{s_j^y} (r_{j,k+i|k} - y_{j,k+i|k}) \right)^2, \\
J_u(z_k) &= \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{i=0}^{H_p-1} \left(\frac{w_{i,j}^u}{s_j^u} (u_{j,k+i|k} - v_{j,k+i|k}) \right)^2, \\
J_{\Delta u}(z_k) &= \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{i=0}^{H_p-1} \left(\frac{w_{i,j}^{\Delta u}}{s_j^{\Delta u}} (u_{j,k+i|k} - u_{j,k+i-1|k}) \right)^2, \\
J_\epsilon(z_k) &= \rho_\epsilon \epsilon_k^2,
\end{aligned}$$

donde $(\cdot)_{j,t_a|t_b}$ es el valor de la j variable en el instante t_a predicha en el instante t_b , y dichas variables son las salidas y_j , las referencias que debe seguir las salidas r_j , los controles u_j y las referencias que siguen los controles v_j ; y la variable de violación de restricciones ϵ_k . Estas funciones de costes contienen ciertos parámetros editables por el usuario. Por una parte tenemos los pesos para las salidas, los controles y el ratio de variación de los controles $w_{i,j}^y$, $w_{i,j}^u$ y $w_{i,j}^{\Delta u}$, respectivamente. Estos determinan cuanto coste supone no cumplir con cada objetivo específico por parte de la salida o variable de control j en un intervalo i dentro del horizonte de predicción p calculado en el momento k , tanto de manera absoluta como relativa respecto a las demás. Estos pesos van complementados junto a los factores de escala s_j^y , s_j^u y $s_j^{\Delta u}$, los cuales pueden mejorar el proceso de optimización si se les asigna el valor del rango máximo de trabajo con el cual se desee que opere cada variable. El parámetro ρ_ϵ indica el peso que tiene la violación total del conjunto de restricciones. Esto se hace ya que en la práctica es muy difícil cumplir con todas ellas, por lo que simplemente se asigna un cierto coste elevado o no para decidir en qué medida se puede pasar por alto. Excepto ρ_ϵ , el resto de pesos pueden asignarse con un valor distinto para cada instante k dentro del horizonte de predicción; esto puede ser de interés por ejemplo para dar diferentes pesos al cambiar de una etapa transitoria a estacionaria, o al finalizar el horizonte de control. En nuestro caso hemos optado por dejarlos constantes para todo el intervalo de predicción. También existe la posibilidad de manipular estos parámetros *en línea*, es decir, durante el propio proceso de control, pero eso supone un incremento del gasto computacional, y no es apropiado tomando un periodo de muestreo inferior a 1 segundo. Los parámetros elegidos pueden verse en la Tabla 2.

No se necesita en principio tomar ninguna restricción que no sea el limitar el rango de movimiento del disco, por lo que no impondremos ninguna restricción de igualdad y desigualdad adicional. Y respecto a las jacobianas, se ha decidido añadir las del modelo de la planta y de la salida, la primera debida a que imponer calcularla numéricamente al controlador puede tener significancia en el tiempo de cálculo. Remarcar que esta Jacobiana solo funciona correctamente en caso de haber dado al controlador el modelo de la planta en tiempo continuo. Esta

función introducida, que se puede ver en C.4, cuenta con las matrices obtenidas de aplicar las derivadas parciales respecto a las variables de estado y respecto a los controles, es decir

$$\begin{aligned} D_x f, \\ D_u f. \end{aligned}$$

Por último, el optimizador ofrecido por MATLAB es `fmincon`, un solver para problemas de optimización con restricciones no lineales. También puede seleccionarse uno propio, pero este trabajo no se centra en el diseño de uno. Para este solver, entre otros parámetros como el número máximo de operaciones o la tolerancia de error para la convergencia, está la elección del algoritmo de optimización a usar. Los cinco algoritmos disponibles son:

- `sqp`
- `sqp-legacy`
- `interior-point`
- `trust-region-reflective`
- `active-set`

De los 5 algoritmos, el algoritmo `sqp` da buenos resultados y con notoria diferencia es el más rápido, por lo que es el elegido. Con restricciones y costes definidos, el problema que debe resolver el optimizador en el instante k es

$$\min_{z_k} \{J(z_k)\}$$

tal que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} - f(x, u, t) \\ x_0 - x(0) \end{pmatrix} &= 0, \\ \begin{pmatrix} u_{max} - u \\ u - u_{min} \\ x_{max} - x \\ x - x_{min} \\ y_{max} - y \\ y - y_{min} \end{pmatrix} &\geq 0. \end{aligned}$$

Así da por finalizado el diseño del NLMPC. En la siguiente tabla se muestran los valores de los parámetros elegidos.

Parámetros	
N_x	4
N_u	3
N_y	2
T_s	0.1
H_p	10
H_m	5
w^u	(0, 0, 0)
w^y	(0.1, 0.1)
s^y	$(\frac{d}{2\sqrt{2}}, \frac{d}{2\sqrt{2}})$
u_{min}	(0.001, 0.001, 0.001)
y_{min}	$(-\frac{d}{2\sqrt{2}}, -\frac{d}{2\sqrt{2}})$
y_{max}	$(\frac{d}{2\sqrt{2}}, \frac{d}{2\sqrt{2}})$

Tabla 2: Parámetros del controlador NLMPC.

6. Diseño final del sistema

Una vez diseñados los servomecanismos para nuestra planta, ahora es necesario plantearse como se podría llevar a cabo el montaje del sistema completo. Este tendría la estructura de la Figura 12 .

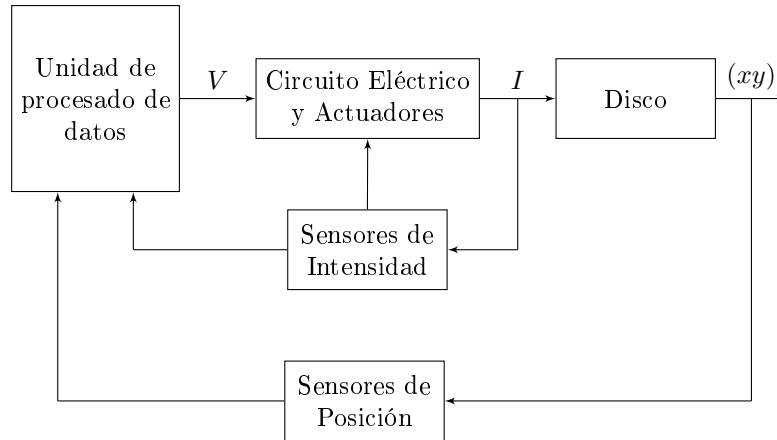


Figura 12: Esquema del sistema completo.

Como se puede ver, desde un sistema de procesamiento de datos en tiempo real, se ejercerían la tareas de, a partir de las variables de posición medidas, calcular el voltaje que se debe aplicar al circuito RL para que circule la intensidad deseada por este. Para el cálculo de estos voltajes, se requiere el conocimiento de todos los estados del sistema. En un principio solo disponemos de las variables de posición x e y , razón por la cual se presenta el diseño de 2 observadores para nuestro sistema. Para los sistemas linealizados se diseñará un observador lineal, mientras que para el otro se diseñará otro no lineal.

Nótese también que el sistema del circuito RL está en lazo cerrado, con las salidas de los sensores de intensidad cerrando el lazo. Esto es debido a que se pretende diseñar un controlador PI analógico para las intensidades que circulan en las bobinas.

También se discuten en esta sección final otros aspectos del montaje que tendrían que tomarse en cuenta para llevar a la práctica la teoría desarrollada en este trabajo: el material del núcleo de los electroimanes, el movimiento y sensado del disco, los actuadores para el control de las intensidades, etc.

6.1. Modelo eléctrico

El modelo real de las inductancias de nuestro sistema, sin tener en cuenta inductancias magnéticas, es un circuito R-L como el de la Figura 13. La función de transferencia del modelo eléctrico de la planta es

$$G(s) = \frac{1}{s + \frac{R}{L}}. \quad (6.1)$$

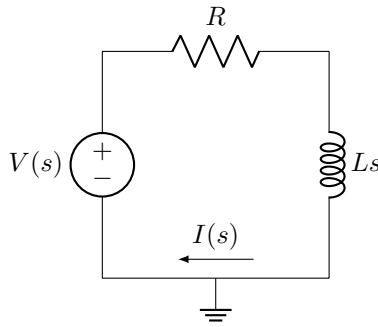


Figura 13: Modelo eléctrico de la planta.

Aunque realmente la inductancia de las bobinas es variable, se puede tomar su valor como constante debido a que para nuestro rango de trabajo esta no varía de manera crítica. Para nuestras simulaciones tomamos los valores mostrados en la Tabla 3.

Parámetros		Unidades
R	10	Ω
L	50	mH

Tabla 3: Parámetros del modelo eléctrico.

6.2. Diseño de controlador PI para intensidades

El control de la intensidad que llega hasta los bobinados es de gran importancia para poder llevar a cabo el sistema de control real. Una vez computadas las intensidades que se deban introducir en las bobinas y las señales hayan pasado por el DAC, todo el proceso de control remanente se lleva a cabo en tiempo continuo, ya que las señales que circulan por este son analógicas. La estructura del subsistema para el control de las intensidades es el siguiente:

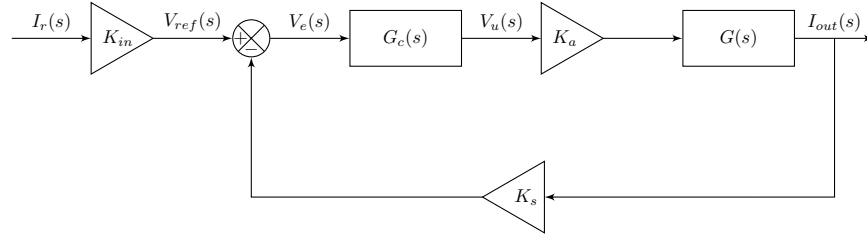


Figura 14: Esquema del subsistema eléctrico.

En la figura, K_{in} es una constante que relaciona la intensidad que debemos aplicar con el voltaje que saldrá del DAC de nuestro sistema de procesado de datos. Este voltaje, junto con el obtenido del sensor de intensidad, da lugar a la señal de error V_e , la cual será transformada por el controlador PI a voltaje de control. Debido a que se requieren voltajes superiores en algunos casos a los que pueden ser proporcionados por Amplificadores Operacionales, el voltaje de control es amplificado por un convertidor DC-DC, representado por K_a , y seguidamente este es aplicado a nuestra inductancia. Los valores de K_{in} y K_s son los mismos puesto que su función es calcular correctamente el error para después poder amplificar correctamente el voltaje de control que entra hacia las inductancias; de hecho, se cumple que $K_{in} = K_s = K_a^{-1}$, por lo que matemáticamente, el diagrama de la Figura 14 es equivalente al de la Figura 15, respetando eso si las conversiones entre voltios y amperios. Nuestro problema

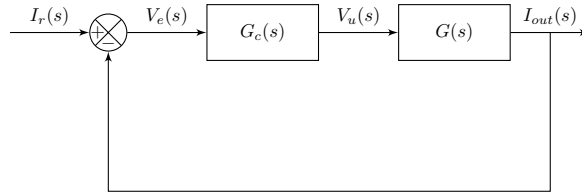


Figura 15: Esquema del subsistema eléctrico simplificado.

ahora es el de diseñar un controlador PI para un circuito en lazo cerrado con realimentación unitaria. Con la aplicación PID Tuner de MATLAB® se puede diseñar de manera eficaz un controlador PI con una respuesta ajustada a nuestras necesidades. Tomamos por ejemplo los siguientes parámetros proporcional

e integral para nuestro controlador, cuya función de transferencia viene dada por

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

$$K_p = 7.91,$$

$$K_i = 2650.$$

Con 2 OA se puede montar un circuito como el de la Figura 16, el cual actúa como restador e integrador proporcional. La función de transferencia de este es la siguiente:

$$G_c(s) = \frac{V_u(s)}{V_{ref}(s) - V_I(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5} + \frac{R_4}{R_3 C_6 R_5 s}, \quad (6.2)$$

con

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

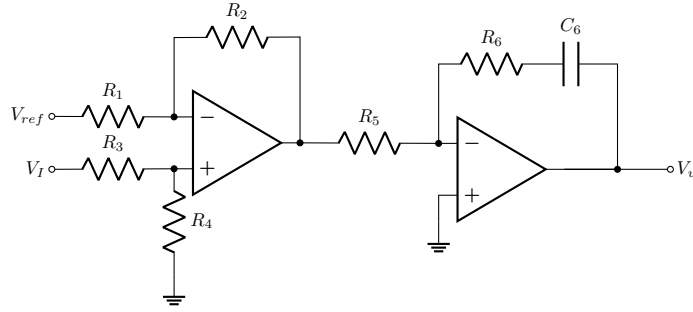


Figura 16: Circuito del controlador PI.

Los valores de las constantes K_p y K_i deben ser conseguidos mediante los valores de las resistencias y del condensador existentes en el mercado. Tomando los valores de la Tabla 4, los valores de las constantes son

$$K_p = 7.6923,$$

$$K_i = 2564.1,$$

y la función de transferencia final del controlador queda

$$G_c(s) = 7.6923 + \frac{2564.1}{s}. \quad (6.3)$$

Parámetros		Unidades
R_1	100	Ω
R_2	100	Ω
R_3	100	Ω
R_4	100	Ω
R_5	3.9	$K\Omega$
R_6	30	$K\Omega$
C_6	100	nF

Tabla 4: Parámetros del circuito PI.

6.3. Diseño de observador de estados

Un observador de estados es un subsistema cuya función es reconstruir el vector de estados de un sistema a partir de la señal de entrada y la salida de este, como se puede ver de manera esquemática en la Figura 17. Es de gran utilidad cuando no se puede medir correctamente todas las variables de estado si estas son requeridas [8], por ejemplo, para computar una ley de control $u = u(x)$.

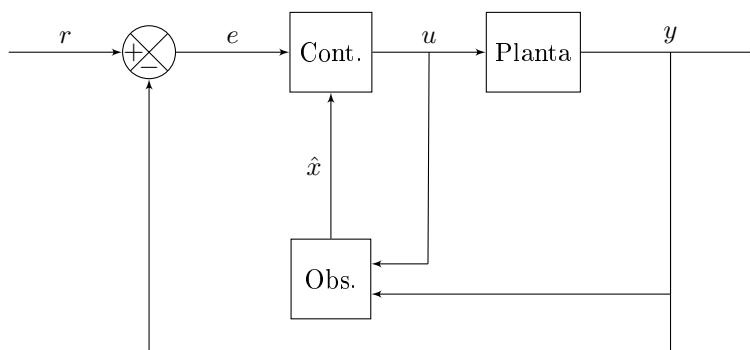


Figura 17: Modelo de sistema controlador-observador.

El primer paso para diseñar un observador es comprobar la *observabilidad* del sistema, esto es, determinar si todos los estados del sistema pueden ser estimados con el observador. En el caso de nuestro sistema, la condición de observabilidad es equivalente a la condición (ii) del Teorema A.6.4, por lo que sabemos que esta se cumple, y nuestro sistema es completamente observable. Ahora el problema radica en que, para nuestros 2 sistemas de control, uno es lineal y el otro no. Para cada uno se plantea un tipo diferente de observador.

Para el sistema linealizado, se propone diseñar un *Observador de Luenberger*; mientras que para el sistema no linealizado, la opción más óptima es un *Filtro de Kalman Extendido*. Solo vamos a centrarnos en el diseño del primero, aunque el segundo será implementado en Simulink para acompañar al MPC.

El modelo de nuestro observador de Luenberger en tiempo discreto es

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}\hat{x}_k + \hat{B}u_k + K_e(y_k - \hat{y}_k), \quad (6.4)$$

$$\hat{y}_k = \hat{C}\hat{x}_k, \quad (6.5)$$

donde \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} son las respectivas matrices de cada modelo linealizado pasadas a tiempo discreto, y \hat{x} y \hat{y} son las estimaciones de estado y salida hechas por el observador, respectivamente. A diferencia del el regulador cuadrático, esta vez nos basaremos en la colocación arbitraria de polos tal que \hat{x} converja hacia x , colocando los valores propios de $\hat{A} - \hat{B}K_e$ mas a la izquierda en el plano complejo que los polos obtenidos mediante la implementación de los servosistemas. El objetivo del observador es hacer converger \hat{x} hacia x , dicho de otra forma,

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = \hat{A}(x_k - \hat{x}_k) + K_e C(x_k - \hat{x}_k).$$

Si sustituimos $e = x - \hat{x}$, tenemos

$$e_{k+1} = (A + K_e C)e_k. \quad (6.6)$$

Mediante el principio de dualidad, esta ecuación puede reescribirse como

$$e_{k+1} = (A^T - C^T K_e^T)e_k, \quad (6.7)$$

lo que corresponde con el mismo problema de asignación de valores a una matriz de ganancias que en el diseño de un servosistema. Al esta vez usar asignación arbitraria, usamos el comando `place`, con los siguientes polos objetivo en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= 0.29, \\ \hat{p}_2 &= 0.3, \\ \hat{p}_3 &= -0.35, \\ \hat{p}_4 &= -0.36, \end{aligned}$$

los cuales están dentro del circulo unitario del plano discretizado. Estos polos se reconvierten a tiempo continuo mediante el cambio de variable

$$\hat{p}_i = e^{T_s p_i}.$$

Las matrices K_e obtenidas, para cada linealización con sus respectivas matrices

de estado y periodos de muestreo son:

$$K_e^{(\Delta)} = \begin{pmatrix} 2.0559 & 0.0021 \\ 95.5847 & 0.2819 \\ 0.0020 & 2.0831 \\ 0.2788 & 99.0389 \end{pmatrix}$$

$$K_e^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 2.0595 & 0.0022 \\ 95.7773 & 0.3053 \\ 0.0022 & 2.0605 \\ 0.2983 & 95.2733 \end{pmatrix}$$

En el caso del sistema no lineal, para complementar el MPC, se utilizará un Filtro de Kalman Extendido. La metodología de un filtro de Kalman es la de estimar el estado tomando en cuenta el posible ruido en el proceso de estimación del estado y en el de observación, con un algoritmo del tipo *predictor-corrector* [11]. El filtro de Kalman extendido usa la misma metodología del filtro lineal en aproximaciones lineales del sistema no-lineal entorno al actual estado estimado. Se tiene un sistema

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k, \\ y_k &= h(x_k) + v_k, \end{aligned} \tag{6.8}$$

con $f, h \in C^1$ y w_k, v_k los ruidos blancos en la estimación de estado y de observación, respectivamente. Los valores de estos ruidos se definen como distribuciones Gaussianas con media 0 y covarianzas Q_k y P_k , respectivamente. Sean

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k^+, u_k},$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k^+},$$

las jacobianas de f y h en \hat{x}_k^+, u_k , y \hat{x}_k^+ el estado estimado actualizado, como se explicará más adelante. Como se ha comentado previamente, el algoritmo de Kalman es de predicción y corrección, por lo que se requiere diferenciar las variables estimadas y las que han pasado por corrección, por lo que, respectivamente, se denotaran por (-) y (+). Dicho esto, el proceso de corrección conlleva 2 cálculos:

- Predicción del estado:

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k^+, u_k)$$

- Predicción de la covarianza del error:

$$P_{k+1}^- = F_k P_k^+ F_k^T + Q$$

Una vez se han hecho las 2 predicciones, se lleva a cabo el proceso de corrección:

- Residuo de medida:

$$\tilde{y}_k = z_k - h(\hat{x}_k^-)$$

- Cálculo de ganancia de Kalman:

$$K_k = P_k^- H_k^T (R + H_k P_k^- H_k^T)^{-1}$$

- Corrección del estado:

$$x_k^+ = x_k^- + K_k \tilde{y}_k$$

- Corrección de la covarianza del error:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-$$

En el caso de tener un filtro de Kalman lineal, las jacobianas no serían requeridas, y de hecho, en su lugar se usarían las matrices A y B de un sistema lineal, las cuales serían constantes para todo k . En la práctica, los parámetros introducidos por el usuario en el diseño son las matrices $Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{M}_{p \times p}(\mathbb{R})$ y las condiciones iniciales del observador $x_0^+ \in \mathbb{R}^n$ y $P_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, y por supuesto el tiempo de muestreo. El tiempo de muestreo es el mismo que el del MPC, y las matrices de covarianzas Q , R y P_0 escogidas son

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^6 \end{pmatrix},$$

$$R = I_2,$$

$$P_0 = I_4.$$

6.4. Consideraciones para el diseño

Las leyes de control obtenidas para los controladores de posición y para los observadores están pensadas para implementarse de manera digital. Los controladores por linealización no requieren de una gran capacidad de cálculo, pues sus leyes de control no suponen un amplio gasto computacional. En el caso del controlador MPC, todo dependerá de la eficacia del optimizador elegido para el problema de control óptimo. En todo caso, una placa Arduino Due o una placa Raspberry Pi 4, con unos precios de 35 €, pueden llevar a cabo la labor.

La movilidad del disco en el plano xy debe ser tal que se pueda ajustar al modelo que hayamos obtenido de la planta, y que se pueda medir la posición de este en todo momento. Una de las posibilidades es el de usar guías mecánicas,

una para cada eje, las cuales tengan incluidas un sensor de posición, lo cual cumple con el segundo requisito, pero dichas guías aportarían una cierta fricción al movimiento, la cual debería tenerse en cuenta, en forma de incertidumbre. Otro método sería dejando el disco sobre una superficie con una fricción muy pequeña y midiendo la posición mediante visión por ordenador. Este caso requeriría una mayor potencia de procesamiento de datos con tal de evitar el mayor ruido posible en la medida. Para conseguir una fricción lo suficientemente baja superficie de movimiento podría conseguirse recubriendo esta con un fluido lubricante. Existe también la posibilidad de desacoplar el disco de contacto físico mediante otro electroimán en el eje z , pero para ello se requeriría reconsiderar el diseño del modelo de la planta, ya que este se ha hecho a partir de la actuación de campos magnéticos sólo en el eje xy , y otro imán claramente afectaría. También sería posible considerar que el sistema del eje z está desacoplado y sumar su contribución como una incertidumbre estructurada, pero esto requeriría una mayor robustez en el controlador, cosa que no se aborda en este trabajo. Debido al gran rango económico entre las nombradas opciones, no se puede estimar correctamente un precio.

Los valores de las permeabilidades relativas de los materiales que forman el núcleo de los electroimanes y el disco son de 500. Esta permeabilidad puede ser encontrada en núcleos hechos de hierro-níquel. Estos materiales además tienen unas temperaturas de Curie suficientemente altas para que no tengamos que restringir mucho las intensidades en las bobinas. Los elementos de circuitería para construir los circuitos de los controladores PID pueden obtenerse por bajo coste, en general, pero como se verá en la siguiente sección, los materiales requeridos varían en función del controlador, ya que estos demandan diferentes valores de intensidades, lo que conseqüentemente afecta a los voltajes y por supuesto a la potencia que deben soportar dichos componentes.

Respecto al coste de realización del trabajo, los 2 programas utilizados para este han sido MATLAB y Mathematica. El precio de las licencias de dichos softwares varía dependiendo de si se usa en ámbito personal, académico o industrial. En el caso de un estudiante, una licencia MATLAB junto con los complementos utilizados:

- Simulink
- Control System Toolbox
- Optimization Toolbox
- Symbolic Math Toolbox
- Model Predictive Control Toolbox

se puede obtener por 76 €, mientras que una licencia de Mathematica por 159 €.

7. Resultados

En esta sección se comentan los resultados obtenidos sometiendo a prueba a los 3 sistemas de control diseñados. Los 3 sistemas son sometidos a la misma prueba: el seguimiento de una señal de referencia en el plano xy . Esta señal es una combinación de 2 trenes de pulsos en \mathbb{R}^2 , tal y como se describe en la ecuación siguiente:

$$r(t) = \begin{pmatrix} 0.02 \left(\pi \left(\frac{t-10}{10} \right) + \pi \left(\frac{t-30}{10} \right) \right) - 0.01\pi \left(\frac{t-20}{40} \right) \\ 0.02 \left(\pi \left(\frac{t-5}{10} \right) + \pi \left(\frac{t-25}{10} \right) \right) - 0.01\pi \left(\frac{t-20}{40} \right) \end{pmatrix},$$

donde

$$\pi \left(\frac{t-\alpha}{\omega} \right) = \begin{cases} 1 & \alpha - \frac{\omega}{2} \leq t \leq \alpha + \frac{\omega}{2} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

es la función pulso unitaria. Esta señal sigue la forma de un cuadrado de 2 cm de lado centrado en el origen en el plano xy , volviendo pasados 40 segundos al origen, y tiene una duración total de 50 segundos, tiempo para que el mismo recorrido se recorra 2 veces y finalmente el disco se mantenga en el origen 10 segundos. Se examinará la capacidad de seguimiento y estabilización de las leyes de control, la eficacia de la estimación del vector de estado de los observadores y las intensidades requeridas para llevar a cabo el control. Durante esta sección, se usarán los siguientes colores en las gráficas para diferenciar a los diferentes controladores:

- **Azul** para el controlador diseñado por Linealización Aproximada (controlador LA),
- **Rojo** para el controlador diseñado por Linealización Exacta (controlador LE),
- **Verde** para el controlador NLMPC.

Las simulaciones se han llevado a cabo en SimuLink (ver Apéndice B), y los parámetros como matrices de ganancias o de observadores se han calculado con códigos MATLAB que pueden verse en el Apéndice C.

7.1. Seguimiento de referencia

En esta sección se analizan las características de las respectivas respuestas de cada controlador por separado. El primer caso analizado es el controlador LA. La respuesta del sistema a la señal de referencia $r(t)$ es la que se ve en la Figura 18.

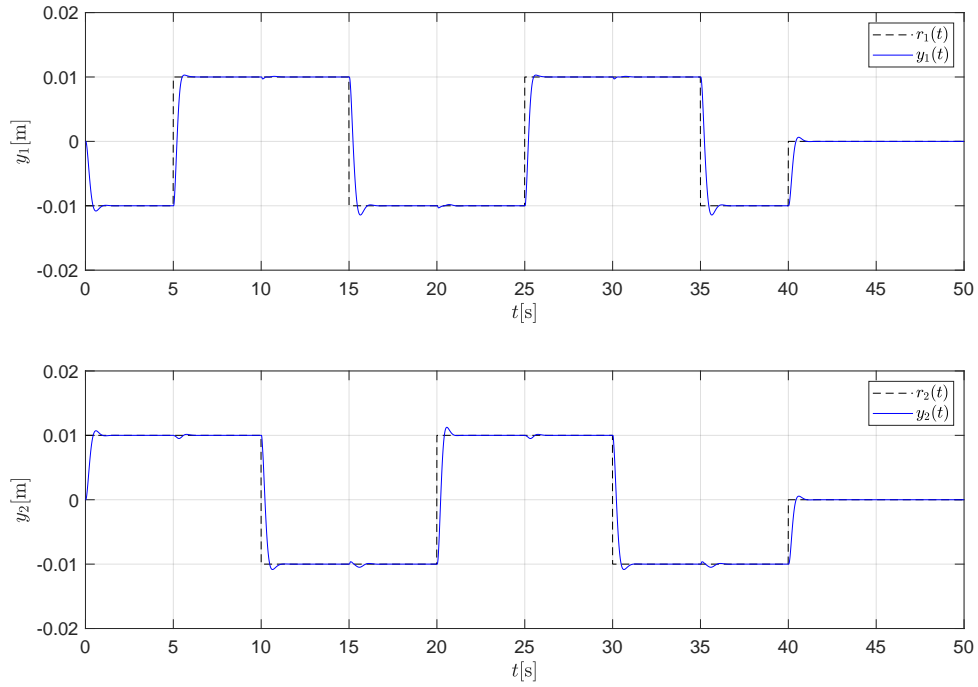


Figura 18: Seguimiento de $r(t)$ por controlador diseñado con linealización aproximada.

Esta respuesta presenta un buen comportamiento, con un sobrepico muy bajo y un tiempo de asentamiento aceptable. Esto lleva a la conclusión de que el rango de efectividad de la linealización aproximada llega hasta el rango en el que se trabaja en esta prueba. El error también tiende rápidamente a 0, como se puede ver en la Figura 19.

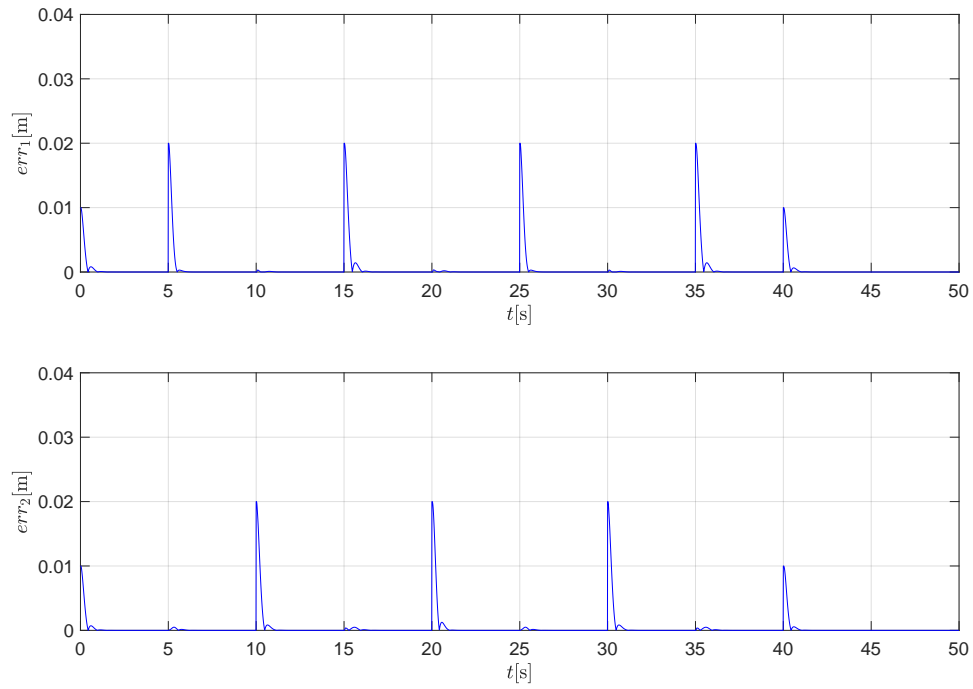


Figura 19: Error de seguimiento del controlador diseñado con linealización aproximada.

El siguiente caso es el controlador LE. Como se puede ver a partir de la gráfica de la Figura 20, este controlador es el que presenta a priori la respuesta más suave. En este caso, al incluir el modelo linealizado de la planta 2 integradores, no se ha requerido integrar ningún integrador extra; esto también afecta al comportamiento del observador diseñado en base a dicho modelo.

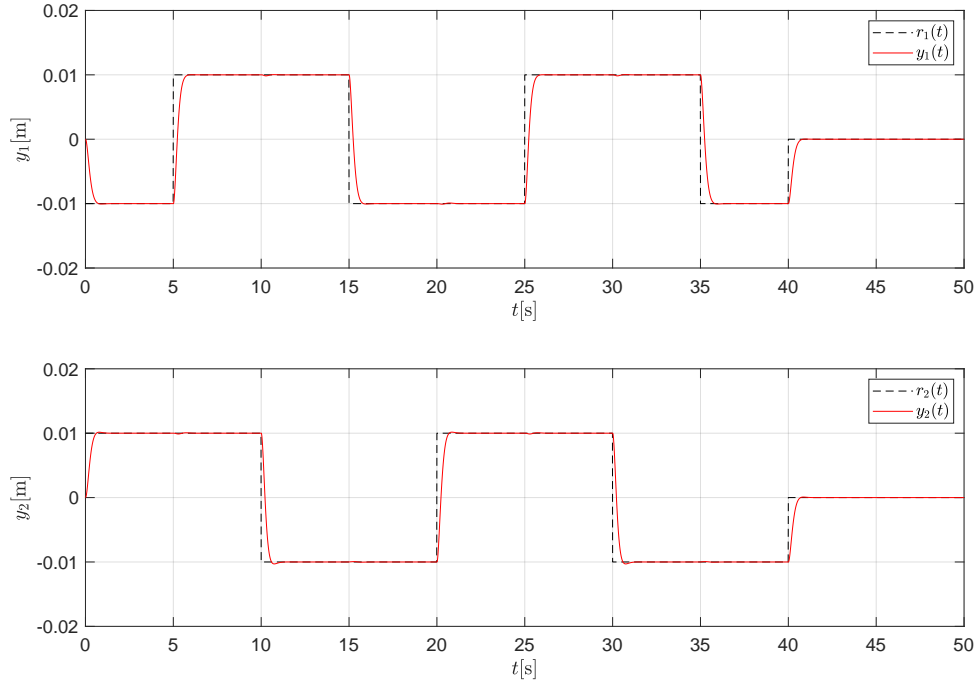


Figura 20: Seguimiento de $r(t)$ por controlador diseñado con linealización exacta.

El error de este controlador también es estable, como se ve en la Figura 21.

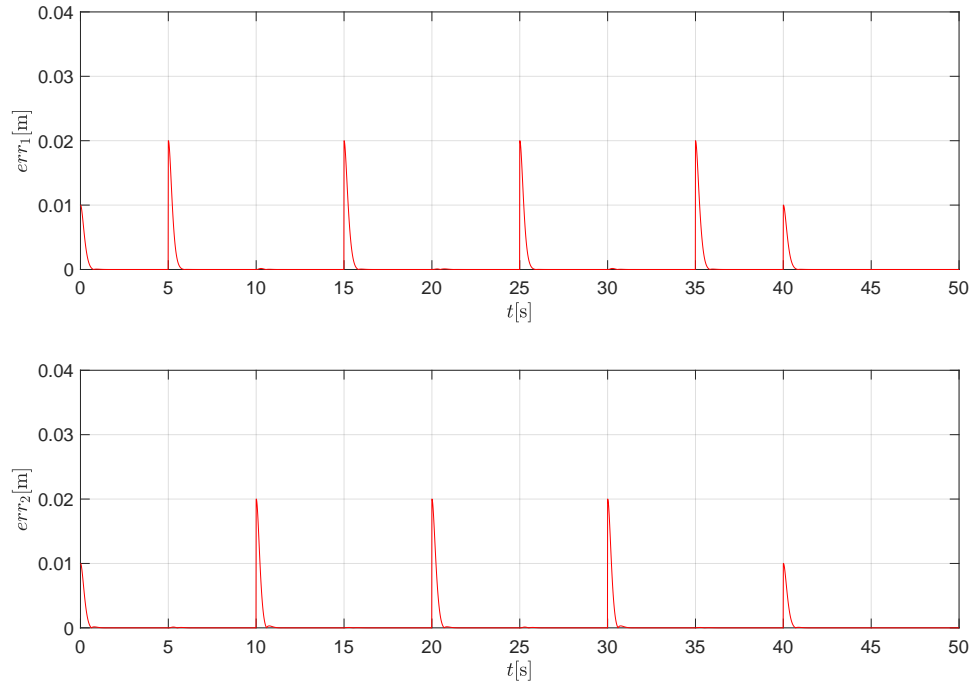


Figura 21: Error de seguimiento del controlador diseñado con linealización exacta.

Finalmente, se tiene la respuesta del controlador NLMPC. Esta es la respuesta que presenta más sobre-pico de las 3, con un tiempo de asentamiento ligeramente más largo que los otros 2, como se puede ver en la Figura 22.

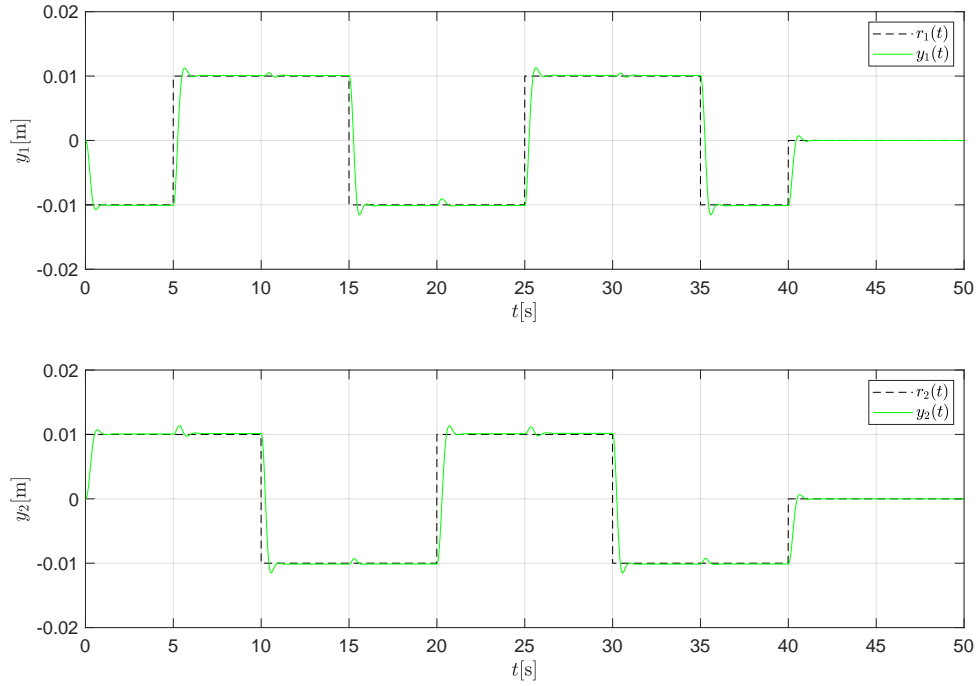


Figura 22: Seguimiento de $r(t)$ por controlador NLMPC.

No obstante, se puede observar en la Figura 23 como durante los tramos de seguimiento de referencia diferente de 0, el error nunca acaba de estabilizarse. Esto es poco apreciable a simple vista, pero es notable si se comparacion a los otros 2. Esto puede ser debido las tolerancias del optimizador usado por el NLMPC, o a tal vez un problema debido al observador, al no haber añadido ruido a las simulaciones, aún que el offset provocado por este error no ha provocado que el sistema pase de los límites establecidos para las variables de salida, por lo que para realizar una prueba más justa, se debería llegar hasta un instante de tiempo suficiente para superar dichos límites.

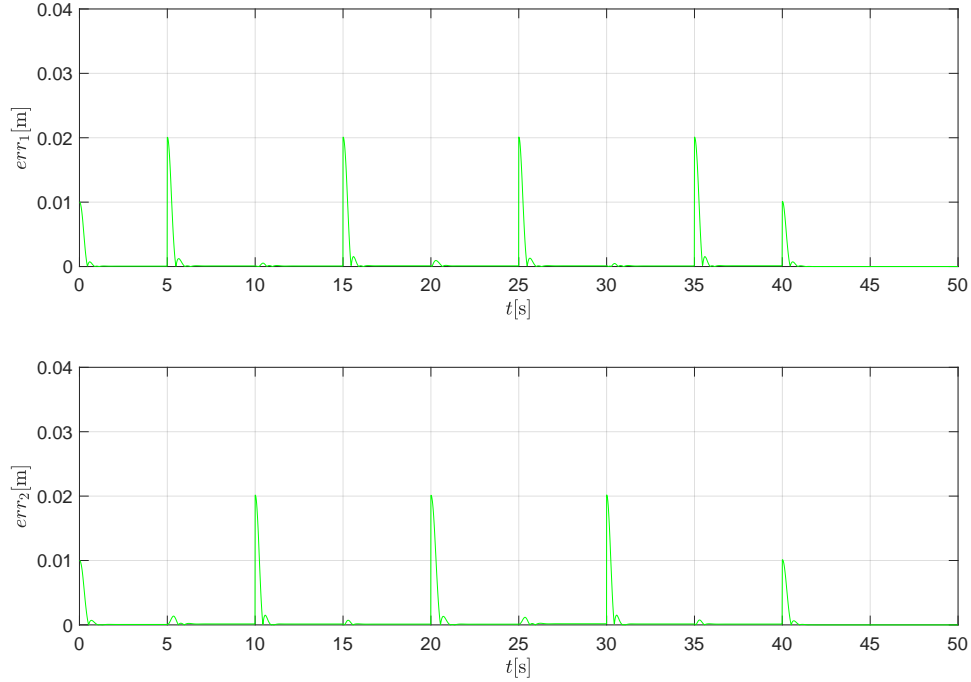


Figura 23: Error de seguimiento del controlador NLMPC.

Adicionalmente, se muestra en la Figura 24 una comparativa de las 3 trayectorias que sigue el centro del disco en el plano xy . Se deja marcada también la zona de trabajo elegida para el movimiento del disco. El controlador NLMPC tiene la trayectoria más agresiva, y llega a estar más cerca del límite de la zona de trabajo, aunque no llega a acercarse mucho a esta. El controlador LE llega al objetivo sin prácticamente sobrepasarlo, a cambio de ir un poco más lento. Finalmente, el controlador LA llega rápido y con menos sobre-pico que el NLMPC y más rápido que el LE al objetivo.

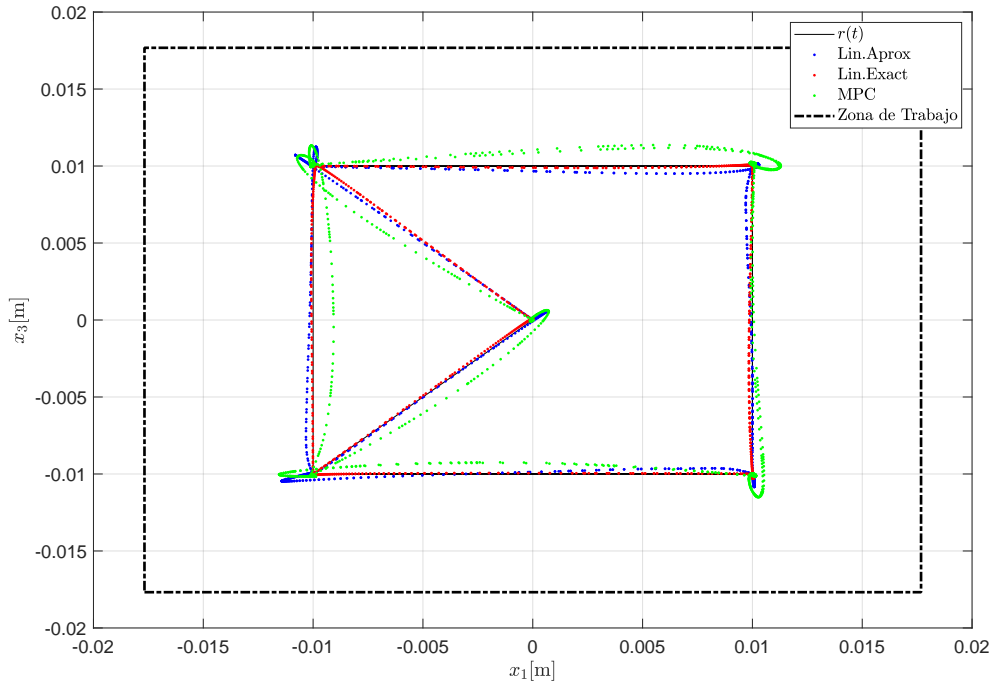


Figura 24: Comparación del comportamiento del disco en el plano xy .

7.2. Estimación de los observadores

Los 2 tipos de observadores usados para los controladores en este trabajo son el Observador de Luenberger y el Filtro de Kalman Extendido. El observador de Luenberger es un observador que se basa en la propia planta y estima el vector de estado a partir del error de las salidas y de forma proporcional. Al ser la planta de tipo 0 en el caso de la linealización aproximada, se produce un error constante a una entrada escalón, que en este caso es producida por mantener una velocidad constante cercana a 0 al llegar a los puntos marcados por $r(t)$. Para el controlador por linealización exacta, al estar basado en una planta con 2 integradores, el error de estimación tiende a 0.

El filtro de Kalman por su parte también estima el estado de manera correcta. Cabe tener en cuenta que se han ajustado las matrices de covarianzas a valores muy altos para x_2 y x_4 aún sin haber añadido ruido a las simulaciones.

Una comparación de los 3 rendimientos de los observadores es mostrada a continuación.

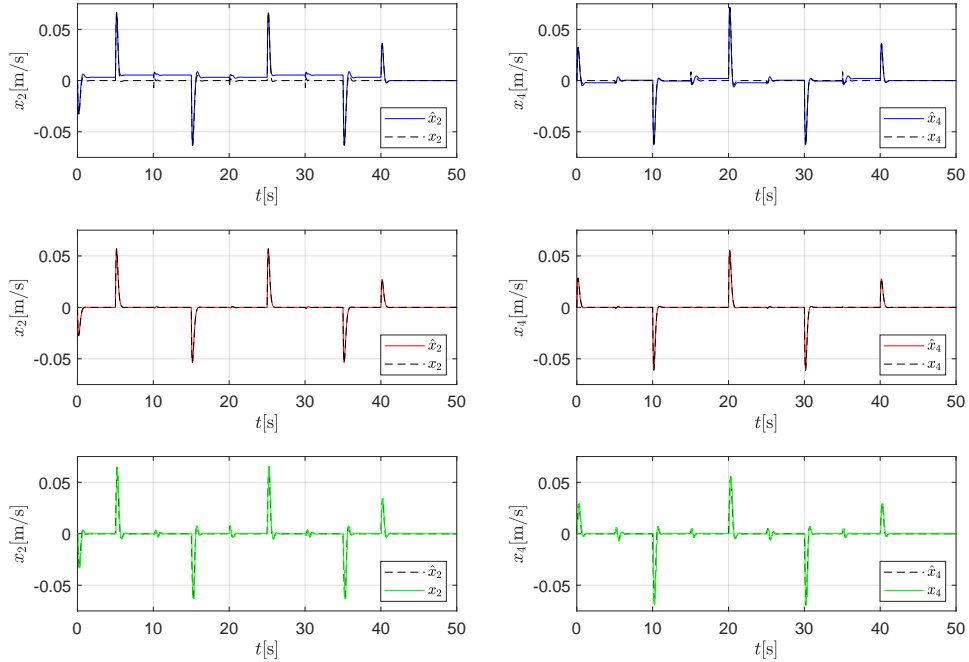


Figura 25: Comparación del comportamiento de los observadores.

7.3. Intensidades en las bobinas

En último lugar, se examinan las corrientes que circulan por las bobinas en cada caso. El caso del controlador LA es el que produce unas oscilaciones más suaves, mientras que el controlador LE es el que produce las más sonadas; ambos mantienen una componente de continua parecida. Por último, el controlador NLMPC requiere de poca corriente en comparación a los otros 2, y de unas variaciones de estas menos agudas que el LE pero no que el LA. Aun así, las intensidades llegan rápidamente a los valores constantes que corresponden.

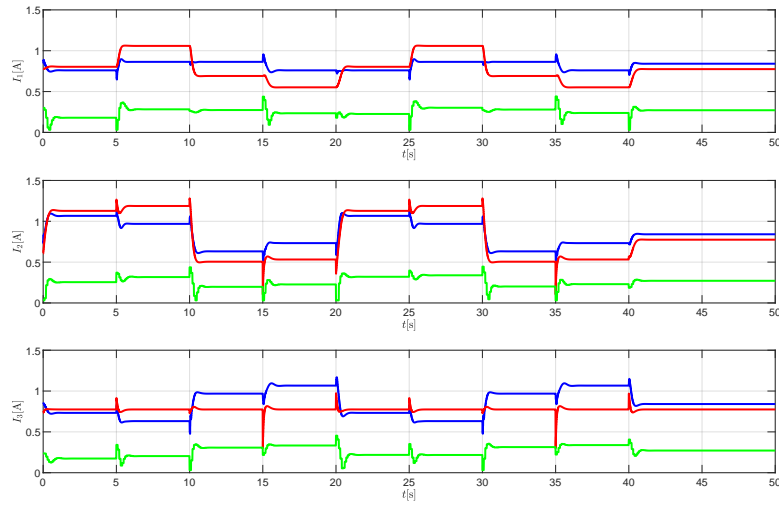


Figura 26: Comparación de las corrientes en las bobinas.

La real brecha que separa los controladores diseñados por linealización con el NLMPC es en el voltaje que se aplica sobre las bobinas. Como se ve en la Figura 27, el NLMPC no requiere de voltajes superiores a 5V, mientras que los otros 2 requieren un rango de hasta 15V. Esto influye enormemente tanto en el acondicionamiento de los sensores de intensidad como en los convertidores DC-DC que apliquen el voltaje necesario en las bobinas.

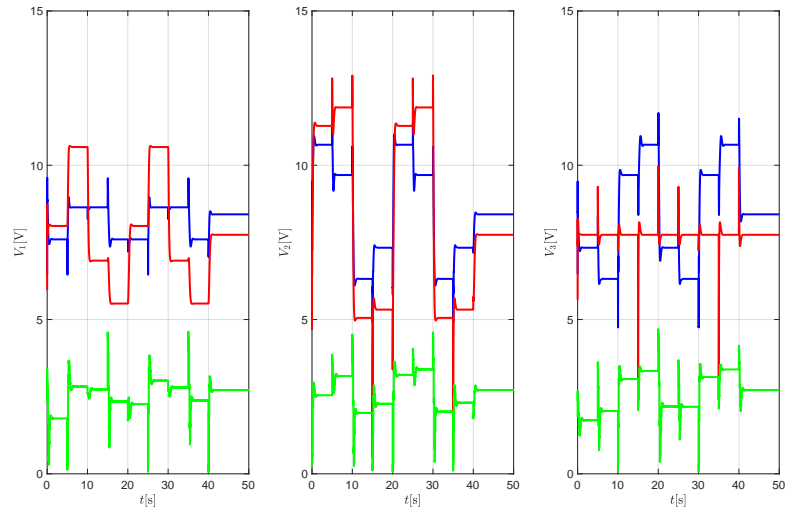


Figura 27: Comparación de las tensiones en las bobinas.

También se puede notar como el sistema NL MPC tiene un consumo notablemente menor, lo que además es positivo en cuanto a las temperaturas a las que puedan llegar los núcleos de los electroimanes.

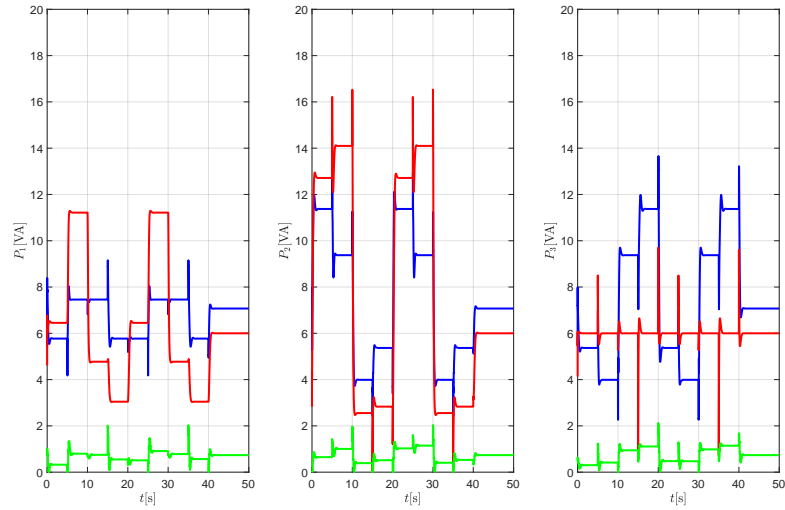


Figura 28: Comparación del consumo de potencia en las bobinas.

8. Conclusiones

Los resultados del apartado anterior no dejan claro si una mayor inversión de tiempo y de recursos da lugar a leyes de control más eficaces. Basándonos solo en las simulaciones, los 3 controladores dan resultados bastante aceptables, con matices por parte de cada uno de ellos, aunque existe notable diferencia en el tiempo de desarrollo de cada uno de ellos, en el gasto computacional y a nivel de potencia.

El controlador LA parece el más adecuado si se requiere un diseño más sencillo a nivel teórico, dando un buen rendimiento en la zona de trabajo del disco. Durante el diseño de este, un parámetro \mathcal{I}_u que aumente la corriente media en las bobinas propicia un acentuamiento del efecto de inestabilidad provocado por el observador que tiene asociado. Esto podría ser solucionado sustituyendo este por un observador integral que pueda eliminar el error estacionario en la estimación de las velocidades.

El controlador LE, aun conllevando un desarrollo matemático bajo una teoría más compleja que los otros 2, el resultado es un sistema linealizado el cual es muy sencillo de modelar mediante técnicas lineales y ofrece resultados excepcionales teóricamente para un amplio rango de trabajo, aunque en este caso no se ha podido mostrar con claridad. Además, teniendo en cuenta la transformación de 3 controles a 2, son muchos los parámetros editables para el diseño que pueden ayudar a obtener los resultados deseados, aunque en nuestro caso se haya decidido optar por una transformación más simple ya que no se requería ir más allá.

El diseño del controlador NLMPC podría ser más una labor de encontrar o generar el código que resuelva el problema de control óptimo de la manera más eficiente posible, o de encontrar tal vez la función de costes adecuada para lograr la respuesta perfecta; pero esa sería un trabajo de la rama informática. En este trabajo solo hemos hecho la labor de diseñar a base de prueba y error un controlador que pueda cumplir la misma función que los diseñados por linealización, y eso se ha conseguido. Al igual que el LE, este tiene muchos parámetros y funcionalidades adicionales para el diseño, y además tiene la ventaja de estar preparado de serie para incertidumbres, aunque no se lleve a cabo una preparación para estas en este trabajo.

Hay que tener en cuenta que para estas simulaciones, y para el trabajo en general, no se han tenido en cuenta factores como el dominio real donde se cumple la superposición de las fuerzas magnéticas, las variaciones de las inductancias, el hecho de que el modelo se basa en intensidades constantes en las bobinas, etc. Para obtener una aproximación del modelo real de mayor precisión, se podrían simular los campos magnéticos mediante solucionadores de EDPs por métodos finitos, pero se ha decidido no llevar a cabo en este trabajo. Tampoco se ha podido comprobar a nivel técnico si la frecuencia elegida para el procesado de

datos era la más apropiada para llevar a cabo correctamente todos los cálculos requeridos.

En general, llevar un diseño de la teoría a la práctica puede llevar muchos inconvenientes, tantos como factores no se lleguen a tener en cuenta. La filosofía de este trabajo es la de que tener varias formas de afrontar un problema de control es una ventaja para el ingeniero, como también lo puede ser una gran especialización en un nicho concreto.

Para una futura revisión a este trabajo, se podrían probar otros métodos como el control en superficies deslizantes o el control adaptivo, el llevar a cabo una robustificación de los controladores, o hacer una estimación de los dominios de atracción de los sistemas una vez han sido controlados, entre otros.

Referencias

- [1] M. Lewis. *Non-Linear Control of a Planar Magnetic Levitation System*. PhD Thesis, University of Toronto, 2004.
- [2] H. H. Woodson and J. R. Melcher. *Electromechanical Dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.
- [3] J.J. E. Slotine, W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [4] H. Sira-Ramírez, R. Márquez, F. Rivas-Echeverría, O. Llanes-Santiago. *Control de Sistemas no Lineales*. Pearson Education, Madrid, 2005.
- [5] S. Sastry. *Nonlinear systems. Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [6] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems: an Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [7] Bryson and Ho. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.
- [8] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson Education, 2003.
- [9] L. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gramkelidze, E. F. Mishchenko. *L.S.Pontryagin selected works. Volume IV: The Mathematical Theory of Optimal Processes*. CRC Press, Boca Ratón, 1986.
- [10] G. R. Rose. *Numerical Methods for Solving Optimal Control Problems*. University of Tennessee, 2015.
- [11] RG Brown, P. Y. C. Hwuang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.

A. Fundamentos matemáticos

A.1. Controlabilidad y Observabilidad de Sistemas Lineales

Consideramos el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{A.1}$$

con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{r \times m}(\mathbb{R})$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ las variables de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ las variables de control y $y(t) \in \mathbb{R}^r$ las variables de salida.

Definición A.1.1. Se dice que el sistema (A.1) es *completamente controlable* si para cualquier t_0 , $x(t_0) = x_0$ y x_f existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ y un control $u(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1$ tal que $x(t_1) = x_f$.

Teorema A.1.2. *El sistema (A.1) es completamente controlable si y solo si la matriz de controlabilidad*

$$U = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) \in \mathcal{M}_{n \times mn}(\mathbb{R})\tag{A.2}$$

tiene rango $\text{rank}(U) = n$.

Teorema A.1.3. *El sistema (A.1) tiene una salida completamente controlable si y solo si la matriz de controlabilidad*

$$U_y = (CB, CAB, CA^2B, \dots, CA^{n-1}B, D) \in \mathcal{M}_{r \times m(n+1)}(\mathbb{R})\tag{A.3}$$

tiene rango $\text{rank}(U_y) = r$.

Definición A.1.4. Se dice que el sistema (A.1) es *completamente observable* si para cualquier t_0 , $x(t_0) = x_0$ y x_f existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que con el conocimiento de cualquier control $u(t)$ y salida $y(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es suficiente para determinar x_0 de forma única.

Teorema A.1.5. *El sistema (A.1) es completamente observable si y solo si la matriz de observabilidad*

$$V = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times mn}(\mathbb{R})\tag{A.4}$$

tiene rango $\text{rank}(V) = n$.

A.2. Discretización de Sistemas Lineales

Teorema A.2.1. *Sea el sistema lineal*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}\tag{A.5}$$

se puede obtener un modelo discretizado

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k, \\ y_k &= C x_k + D u_k,\end{aligned}\tag{A.6}$$

con un periodo de muestreo T_s , obteniendo las matrices A_d y B_d a partir de

$$e^{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_s} = \begin{pmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{pmatrix}.\tag{A.7}$$

A.3. Teoría de Estabilidad de Lyapunov

Consideramos un sistema

$$\dot{x} = f(x, t),\tag{A.8}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$

Definición A.3.1. El punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ se define como un *equilibrio* del sistema (A.8) si $f(x^*, t) \equiv 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición A.3.2. Sea $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ un equilibrio del sistema (A.8):

- x^* es *estable* si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta$ implica que $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.
- x^* es *asintóticamente estable* si es estable y además $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
- x^* es *inestable* si no es estable.

Teorema A.3.3. *Dado un sistema lineal $\dot{x} = Ax$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y sean λ_k con $k = 1, 2, \dots, n$ los valores propios de A . El sistema lineal es:*

- *Asintóticamente estable si y solo si $\text{Re}(\lambda_k) < 0$ para todo k .*
- *Inestable si $\text{Re}(\lambda_k) > 0$ para algún k .*

Definición A.3.4. Consideramos un sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x)\tag{A.9}$$

con $f(x^*) = 0$. Denotamos por Df la matriz Jacobiana de f . El sistema lineal

$$\dot{x} = Df(x^*)x\tag{A.10}$$

es llamado *linealización* de (A.9) en el equilibrio x^* .

Teorema A.3.5. *Si la linealización (A.10) es asintóticamente estable o inestable, entonces el equilibrio x^* de (A.9) tiene el mismo tipo de estabilidad.*

A.4. Control Lineal: Linealización Aproximada

Consideramos el sistema de control

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (\text{A.11})$$

siendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ las variables de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ las variables de control y $f \in C^1$.

Definición A.4.1. Sea x^* un equilibrio del sistema (A.11) con un control constante u^* tal que $f(x^*, u^*) = 0$. La linealización de (A.11) entorno de (x^*, u^*) se define como

$$\Delta \dot{x} = D_x f(x^*, u^*) \Delta x + D_u f(x^*, u^*) \Delta u, \quad (\text{A.12})$$

siendo $\Delta x = x - x^*$ y $\Delta u = u - u^*$.

Teorema A.4.2. Si existe una ley de control por realimentación $\Delta u = K \Delta x$ que establezca la linealización (A.12), entonces, la misma ley de control estabiliza el sistema (A.11), esto es, x^* se convierte en un equilibrio asintóticamente estable del sistema no lineal original en lazo cerrado $\dot{x} = f(x, u^* + K(x - x^*))$.

A.5. Álgebra de Lie y Distribuciones

Definición A.5.1. Definimos la *derivada de Lie* o derivada direccional de la función escalar $h(x)$ respecto al campo vectorial $f(x)$ como

$$L_f h(x) = Dh(x)f(x).$$

Para denotar reiteradas derivadas de Lie se usará la notación

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_f^1 h(x) &= L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) &= L_f(L_f h(x)) \\ &\vdots \\ L_f^n h(x) &= L_f(L_f^{n-1} h(x)). \end{aligned}$$

Definición A.5.2. El *corchete de Lie* de dos campos vectoriales $f(x), g(x) \in \mathbb{R}^n$ se define como

$$[f(x), g(x)] = [f, g] = Dg(x)f(x) - Df(x)g(x).$$

La *operación del adjunto* del campo vectorial f y g denota el cálculo reiterado de corchetes de Lie de la forma

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^1 g &= ad_f g = [f, g] \\ ad_f^2 g &= [f, ad_f g] \\ &\vdots \\ ad_f^n g &= [f, ad_f^{n-1} g]. \end{aligned}$$

Definición A.5.3. Sean $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $i = 1, \dots, k$, suaves en D . Dado un punto $x_p \in D$ definimos el espacio vectorial

$$\Delta(x_p) = \text{span}\{f_1(x_p), \dots, f_k(x_p)\}.$$

La colección de todos los espacios vectoriales $\Delta(x)$ para todo $x \in D$ es llamada *distribución* y se denota por

$$\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}.$$

Definición A.5.4. Se dice que Δ es no singular si $\dim(\Delta(x)) = d$ con d constante para todo $x \in D$.

Definición A.5.5. Se dice que Δ es involutiva si $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$.

Teorema A.5.6. Si $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$ es no singular, entonces Δ es involutiva si y solo si $[f_i, f_j] \in \Delta$ para todo $1 \leq i, j \leq k$.

A.6. Control no Lineal: Linealización exacta

Consideramos un sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad (\text{A.13})$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son campos vectoriales, y $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Seguiremos la teoría explicada en [5] y [6].

Definición A.6.1. El sistema (A.13) es linealizable entorno de x^* con $f(x^*) = 0$ si existe un difeomorfismo $x \rightarrow z = \Phi(x)$ con $\Phi(x^*) = 0$ y una realimentación $u \rightarrow v$ con $u(v, x) = \alpha(x) + \beta(x)v$ lineal en v con β invertible que transforme (A.13) en un sistema lineal $\dot{z} = Az + Bv$ completamente controlable.

Definición A.6.2. El sistema (A.13) con salida $y(x) = h(x) \in \mathbb{R}^m$ tiene vector grado relativo (r_1, r_2, \dots, r_m) en x^* si:

- (a) $L_g L_f^k h_j \equiv 0$ para $k = 0, 1, \dots, r_j - 2$ en un entorno de x^* .
- (b) $L_g L_f^{r_j-1} h_j(x^*) \neq 0$ y la matriz cuadrada de orden m

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_g L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_g L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots \\ L_g L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix}$$

es no singular.

Teorema A.6.3. *Suponemos que el sistema (A.13) tiene $f(x^*) = 0$ y $\text{rank}(g(x^*)) = m$. Entonces (A.13) es linealizable entorno de x^* si y solo si existen m funciones reales $h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ en un entorno de x^* de modo que el sistema (A.13) con salida $y = h(x)$ tenga vector grado relativo (r_1, r_2, \dots, r_m) en x^* con grado relativo absoluto $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$.*

Teorema A.6.4. *Suponemos que el sistema (A.13) tiene $f(x^*) = 0$ y $\text{rank}(g(x^*)) = m$. Definimos la secuencia de distribuciones*

$$G_i = \text{span}\{ad_f^s g_j : 1 \leq j \leq m, 1 \leq s \leq i\}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

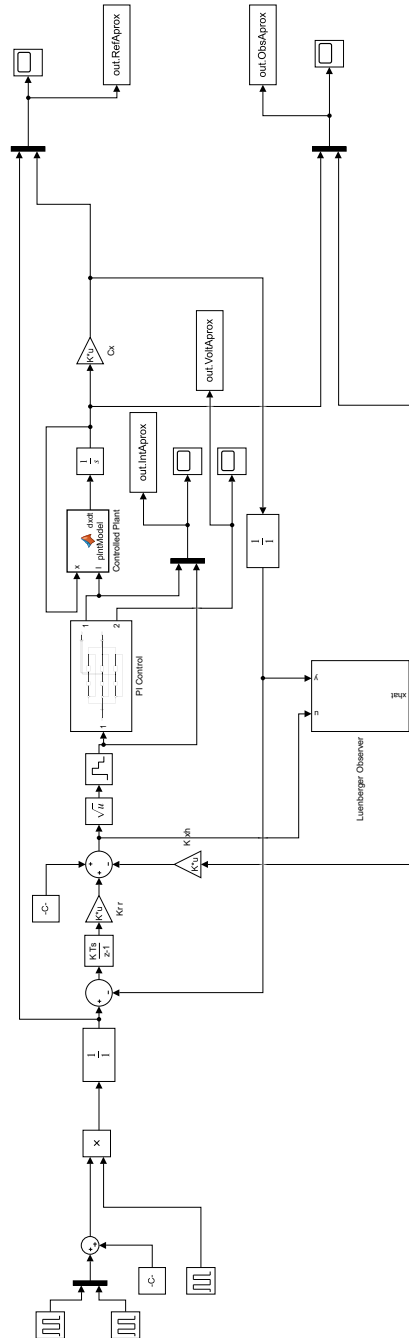
Entonces (A.13) es linealizable entorno de x^ si y solo si existe un entorno $D \subset \mathbb{R}^n$ en x^* tal que:*

- (i) *G_i es no singular en D , para $i = 1, \dots, n-1$ y $\dim(G_{n-1}) = n$ para todo $x \in D$,*
- (ii) *G_i es involutiva en D , para $i = 1, \dots, n-2$.*

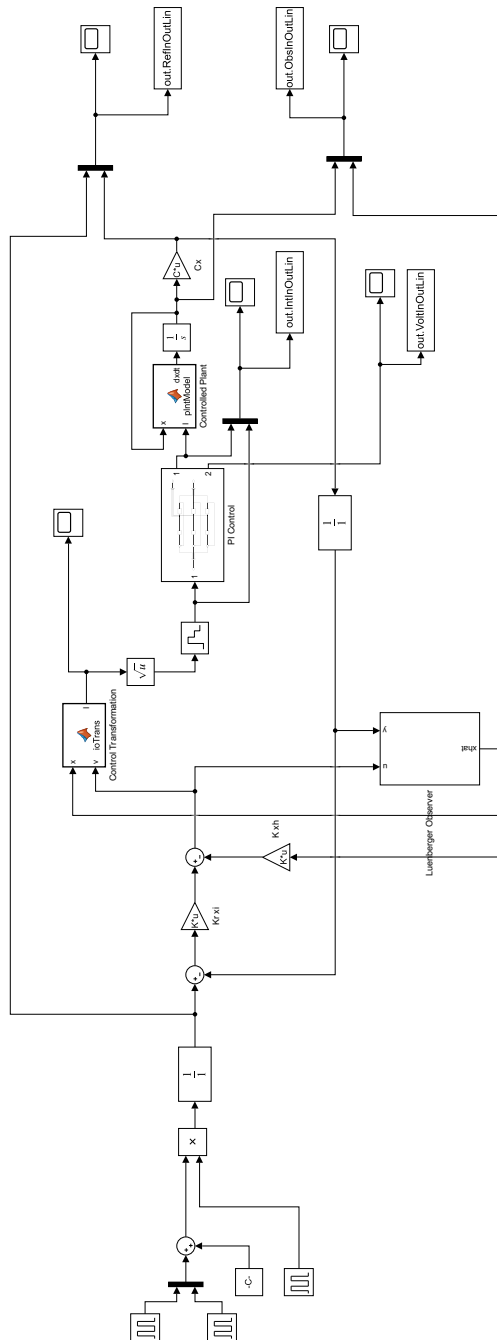
Si $\text{rank}(g(x^*)) \neq m$ no se puede aplicar el Teorema 3, Sin embargo, segun [6], si $\text{rank}(g(x)) = \rho < m$ pero este es constante en un entorno de x^* , el problema de la linealización exacta para (A.13) es soluble si y solo si existen ρ funciones (salidas) $h(x) = (h_1(x), \dots, h_\rho(x))$ en un entorno de x^* de modo que el sistema (A.13) con salida $y = h(x)$ tenga vector grado relativo (r_1, \dots, r_ρ) en x^* con $r_1 + \dots + r_\rho = n$. Por supuesto en esta situación la matriz $A(x)$ no es cuadrada y se debe modificar en la Definición A.6.2 de grado relativo la condición de $A(x^*)$ es no singular por la de $\text{rank}(A(x^*)) = \rho$ (rango máximo pues ρ es el número de columnas de A).

B. Modelos Simulink

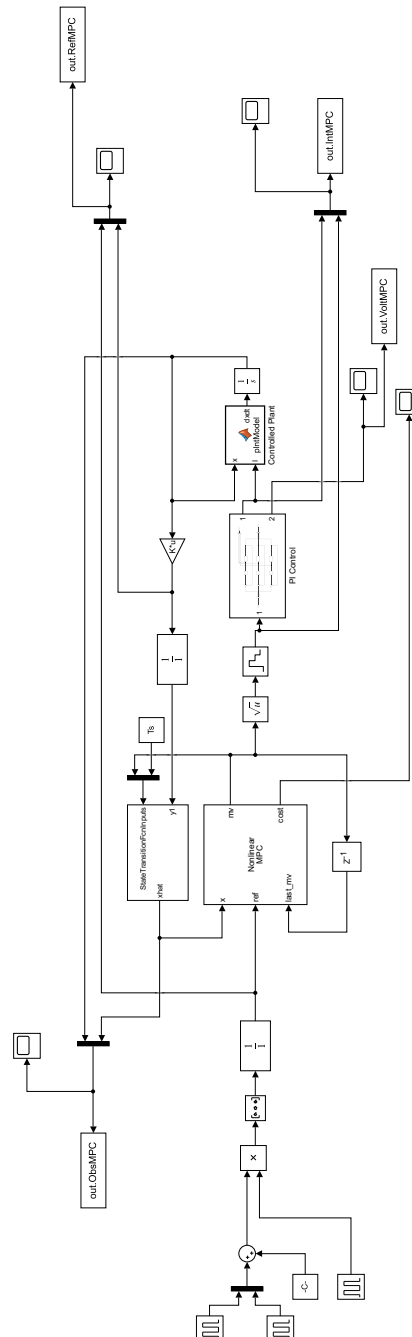
B.1. Modelo del control por Linealización Aproximada



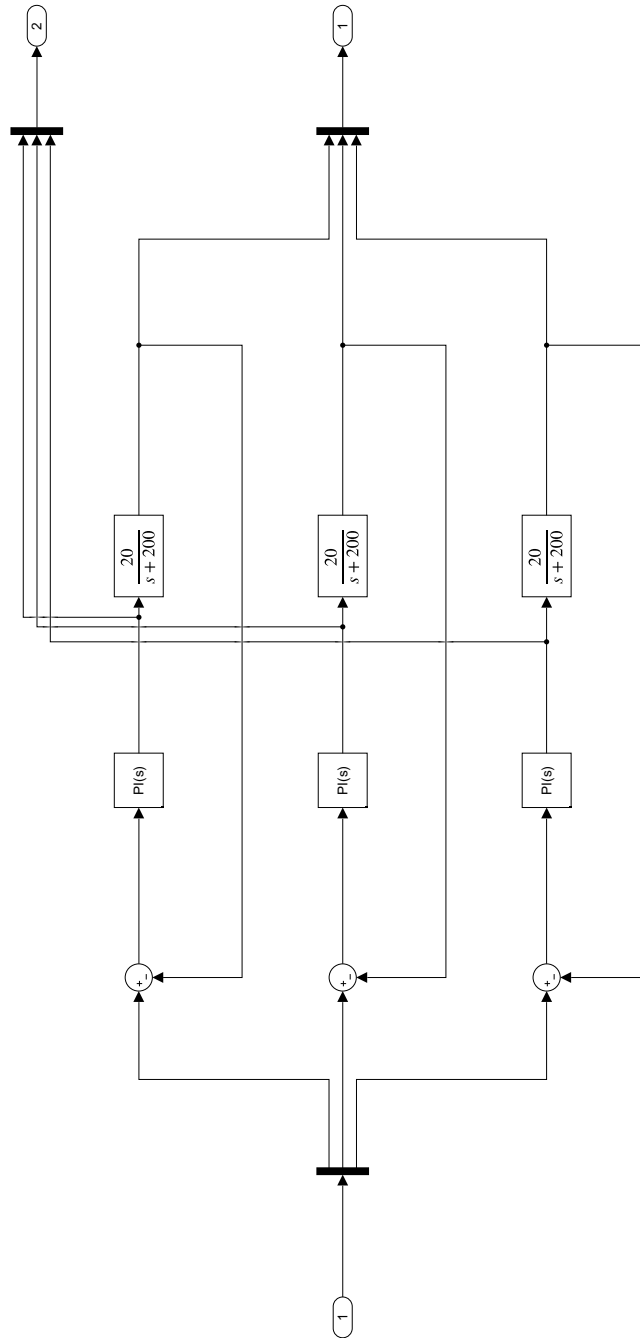
B.2. Modelo del control por Linealización Exacta



B.3. Modelo del control con NLMPC



B.4. Modelo del control PI de intensidades



C. Códigos MATLAB

C.1. Código de diseño del controlador por Linealización Aproximada.

Este código genera las matrices de ganancias y todos los parámetros requeridos para poder realizar la simulación en Simulink de la planta controlada con el controlador diseñado por linealización aproximada.

```
% System definition

u0 = 4*pi*(10^-7);
u1 = 500*u0;
u2 = u1;
L1 = 0.25;
L2 = 0.03;
d = 0.05;
m = 0.05;
N = 250;
A1 = 0.01;
A2 = 0.0003;
II = sqrt(0.5);

dx21 = -((3*A1*(A2^2)*II*(N^2)*u0*(u1^2)*(u2^2))*...
          (A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0 - d*u1)))/...
          (4*d*m*(A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0+d*u1))^3);
dx43 = (A1*A2^2*II*N^2*u0*u1^2*u2^2)*...
          (A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0+7*d*u1))/...
          (4*d*m*(A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0+d*u1))^3);

du21 = -(A1*(A2^2)*(N^2)*u0*(u1^2)*(u2^2))/...
          (2*m*(A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0 + d*u1))^2);
du22 = (A1*(A2^2)*(N^2)*u0*(u1^2)*(u2^2))/...
          (4*m*(A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0 + d*u1))^2);
du23 = du22;
du42 = -sqrt(3)*du23;
du43 = sqrt(3)*du23;

A = [0 1 0 0;dx21 0 0 0;0 0 0 1; 0 0 dx43 0];
B = [0 0 0;du21 du22 du23;0 0 0;0 du42 du43];
C = [ 1 0 0 0;...
      0 0 1 0 ];
```

```

D = [0 0 0;0 0 0];

% Referencece params

Ampl=0.01;% Ref. signal amplitude
x0 = zeros(4,1);% Init conditions for integrators
Ts = 0.01;% Sample Time

% LQR

Ahat = [A zeros(4,2);-C zeros(2,2)];
Bhat = [B;zeros(2,3)];

sysDis = c2d(ss(Ahat,Bhat,[C zeros(2,2)],D),Ts);
Ahatdis = sysDis.A;
Bhatdis = sysDis.B;

Qhat = diag([25000 10000 25000 10000 100000000 100000000]);
Rhat = diag([500 500 500]);

Khat = dlqr(Ahatdis,Bhatdis,Qhat,Rhat);% Khat = [K -Kr]
K = Khat(:,1:4);
Kr = -Khat(:,5:6);

% Observer

sysDis = c2d(ss(A,B,C,D),Ts);% Discrete-time model for observer
Adis = sysDis.A;
Bdis = sysDis.B;

p = [-0.29 -0.3 -0.35 -0.36];% Place observer poles left
                                % of CL system ones
Ke = place(Adis',C',p)';

```

C.2. Código de diseño del controlador por Linealización Exacta.

Este código genera las matrices de ganancias y todos los parámetros requeridos para poder realizar la simulación en Simulink de la planta controlada con el controlador diseñado por linealización exacta.

```
% System definition

A = [ 0 1 0 0;...
      0 0 0 0;...
      0 0 0 1;...
      0 0 0 0 ];
B = [ 0 0;...
      1 0;...
      0 0;...
      0 1 ];
C = [ 1 0 0 0;...
      0 0 1 0 ];
D = [0 0;0 0];

% Reference params

Ampl=0.01;%Ref. signal amplitude
x0 = zeros(4,1);% Init conditions for integrators
Ts = 0.01;%Sample Time

%LQR

sysDis = c2d(ss(A,B,C,D),Ts);
Adis = sysDis.A;
Bdis = sysDis.B;

Q = diag([1000000 30000 1000000 30000]);
R = diag([500 500]);

Ku = dlqr(Adis,Bdis,Q,R);
Kr = [Ku(:,1) Ku(:,3)];
K = [zeros(2,1) Ku(:,2) zeros(2,1) Ku(:,4)];

% Observer

p = [0.3 0.29 -0.35 -0.36];
Ke = place(Adis',C',p);
```

C.3. Código de diseño del controlador MPC.

Este código genera las matrices de ganancias y todos los parámetros requeridos para poder realizar la simulación en Simulink de la planta controlada con el controlador MPC.

```
% Number of inputs, outputs and state vars

nx = 4;
ny = 2;
nu = 3;

% nlmpc object creation

nlPlnt = nlmpc(nx, ny, nu);

% Additional params

d = 0.05;
Ampl=0.01;%Ref. signal amplitude
x0 = zeros(4,1);% Init conditions for integrators
Ts = 0.1;%Sample Time

% Matrices for Kalman Filter
Q = diag([1 1000 1 1000]).^2;
R = diag([1 1]).^2;

% nlmpc configuration

nlPlnt.Ts = Ts;

nlPlnt.PredictionHorizon = 10;

nlPlnt.ControlHorizon = 5;

nlPlnt.Model.StateFcn = "plantFcn";
nlPlnt.Model.OutputFcn = @(x,u) [x(1); x(3)];

nlPlnt.OV(1).Min = -0.025/sqrt(2);
nlPlnt.OV(1).Max = 0.025/sqrt(2);
nlPlnt.OV(1).ScaleFactor = 0.025/sqrt(2);
nlPlnt.OV(2).Min = -0.025/sqrt(2);
nlPlnt.OV(2).Max = 0.025/sqrt(2);
nlPlnt.OV(2).ScaleFactor = 0.025/sqrt(2);

nlPlnt.MV(1).Min = 0.001;
```

```

nlPlnt.MV(2).Min = 0.001;
nlPlnt.MV(3).Min = 0.001;

nlPlnt.Weights.OutputVariables = [0.1 0.1];
nlPlnt.Weights.ManipulatedVariables = [0 0 0];
nlPlnt.Weights.ManipulatedVariablesRate = [0.3 0.3 0.3];
nlPlnt.Weights.ECR = 200000;

nlPlnt.Jacobian.StateFcn = "stateJacobianFcn";
nlPlnt.Jacobian.OutputFcn = @(x,u) [1 0 0 0; 0 0 1 0];

u0 = [0;0;0];
validateFcns(nlPlnt, x0, u0,[]);% function validation
end

```

C.4. Funciones para el diseño del controlador MPC

Las siguientes funciones de MATLAB corresponden a las que se hace referencia en el diseño del objeto `nlmpc` en el apartado anterior, y a las usadas en el filtro extendido de Kalman en el modelo Simulink.

```
function z = plantFcn(x,u,Ts)

    % system params

    u0 = 4*pi*(10^-7);
    u1 = 500*u0;
    u2 = u1;
    L1 = 0.25;
    L2 = 0.03;
    d = 0.05;
    N = 250;
    A1 = 0.01;
    A2 = 0.0003;
    m = 0.05;

    % Phi functions

    phi = [0 0 0];
    phi(1) = N^2/...
        ( ( L1/(u1*A1) + L2/(u2*A2) + sqrt((x(1)+d)^2 + x(3)^2)...
          /(u0*A1) )^2 * ( sqrt((x(1)+d)^2 + x(3)^2) ) );

    phi(2) = N^2/...
        ( ( L1/(u1*A1) + L2/(u2*A2) + (sqrt((x(1)-d/2)^2 + ...
          (x(3)+sqrt(3)*d/2)^2))/(u0*A1) )^2 * (sqrt((x(1)-d/2)^2 ...
          + (x(3)+sqrt(3)*d/2)^2) ) );

    phi(3) = N^2/...
        ( ( L1/(u1*A1) + L2/(u2*A2) + sqrt((x(1)-d/2)^2 + ...
          ((x(3)-sqrt(3)*d/2)^2))/(u0*A1) )^2 * (sqrt((x(1)-d/2)^2 ...
          + (x(3)-sqrt(3)*d/2)^2) ) );

    % Output vector

    z = zeros(4,1);

    z(1) = x(2);
    z(2) = -1/(2*m*u0*A1)*( phi(1)*(x(1)+d)*u(1)^2 + ...
        phi(2)*(x(1)-d/2)*u(2)^2 + ...
        phi(3)*(x(1)-d/2)*u(3)^2 );
```

```

z(3) = x(4);
z(4) = -1/(2*m*u0*A1)*( phi(1)*(-x(3))*u(1)^2 +...
                        phi(2)*(x(3)+sqrt(3)*d/2)*u(2)^2 +...
                        phi(3)*(x(3)-sqrt(3)*d/2)*u(3)^2 );

end

function [dzdx,dzdu] = stateJacobianFcn(x,u)

    % system params

    mu0 = 4*pi*(10^-7);
    mu1 = 500*mu0;
    mu2 = mu1;
    L1 = 0.25;
    L2 = 0.03;
    d = 0.05;
    N = 250;
    A1 = 0.01;
    A2 = 0.0003;
    m = 0.05;

    x1 = x(1);
    x3 = x(3);

    u1 = u(1);
    u2 = u(2);
    u3 = u(3);

    dzdx = [0,1,0,0;...
            ((N^2*u2*(d - 2*x1)*(d/2 - x1))/(2*((d/2 - x1)^2 + ...
            (x3 + (3^(1/2)*d)/2)^2)^(3/2)*(L1/(A1*mu1) + L2/(A2*mu2))...
            + ((d/2 - x1)^2 + (x3 + (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)/...
            (A1*mu0))^2) - (N^2*u3)/(((d/2 - x1)^2 + (x3 - ...
            (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)*(L1/(A1*mu1) + L2/(A2*mu2))...
            + ((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)/...
            (A1*mu0))^2) - (N^2*u1)/(((d + x1)^2 + x3^2)^(1/2)*...
            (L1/(A1*mu1) + L2/(A2*mu2) + ((d + x1)^2 + ...
            x3^2)^(1/2)/(A1*mu0))^2) - (N^2*u2)/(((d/2 - x1)^2 + ...
            (x3 + (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)*(L1/(A1*mu1) + L2/...
            (A2*mu2) + ((d/2 - x1)^2 + (x3 + (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)...
            /(A1*mu0))^2) + (N^2*u3*(d - 2*x1)*(d/2 - x1))/...
            (2*((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^(1/2)*d)/2)^2)^(3/2)*...
            (L1/(A1*mu1) + L2/(A2*mu2) + ((d/2 - x1)^2 + ...
            (x3 - (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)/(A1*mu0))^2) +...

```


$$\begin{aligned}
& (N^2 u_1 (d + x_1) (2d + 2x_1)) / (2 * ((d + x_1)^2 + \dots \\
& x_3^2)^{(3/2)} * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / (A_2 \mu_2) + ((d + x_1)^2 + \dots \\
& x_3^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^2 + (N^2 u_2 (d - 2x_1) (d/2 - \dots \\
& x_1)) / (A_1 \mu_0 * ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + (3^{(1/2)} d) / 2)^2) * \dots \\
& (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / (A_2 \mu_2) + ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + \dots \\
& (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^3 + (N^2 u_3 (d - \dots \\
& 2x_1) (d/2 - x_1)) / (A_1 \mu_0 * ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 - \dots \\
& (3^{(1/2)} d) / 2)^2) * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / (A_2 \mu_2) + \dots \\
& ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 - (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(1/2)} / \dots \\
& (A_1 \mu_0))^3 + (N^2 u_1 (d + x_1) (2d + 2x_1)) / \dots \\
& (A_1 \mu_0 * ((d + x_1)^2 + x_3^2) * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / \dots \\
& (A_2 \mu_2) + ((d + x_1)^2 + x_3^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^3) \dots \\
& / (2 * A_1 * m * \mu_0), \dots \\
& 0, \dots \\
& -((N^2 u_2 (2x_3 + 3^{(1/2)} d) (d/2 - x_1)) / (2 * ((d/2 - \dots \\
& x_1)^2 + (x_3 + (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(3/2)} * (L_1 / (A_1 \mu_1) + \dots \\
& L_2 / (A_2 \mu_2) + ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + (3^{(1/2)} d) / \dots \\
& 2)^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^2 - (N^2 u_1 x_3 (d + x_1)) / \dots \\
& (((d + x_1)^2 + x_3^2)^{(3/2)} * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / \dots \\
& (A_2 \mu_2) + ((d + x_1)^2 + x_3^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^2) + \dots \\
& (N^2 u_3 (2x_3 - 3^{(1/2)} d) (d/2 - x_1)) / (2 * ((d/2 - \dots \\
& x_1)^2 + (x_3 - (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(3/2)} * (L_1 / (A_1 \mu_1) \dots \\
& + L_2 / (A_2 \mu_2) + ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 - (3^{(1/2)} d) \dots \\
& / 2)^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^2 - (2 * N^2 u_1 x_3 (d + x_1)) / \dots \\
& (A_1 \mu_0 * ((d + x_1)^2 + x_3^2) * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / \dots \\
& (A_2 \mu_2) + ((d + x_1)^2 + x_3^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^3) \dots \\
& + (N^2 u_2 (2x_3 + 3^{(1/2)} d) (d/2 - x_1)) / (A_1 \mu_0 * \dots \\
& ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + (3^{(1/2)} d) / 2)^2) * (L_1 / (A_1 \mu_1) \dots \\
& + L_2 / (A_2 \mu_2) + ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + (3^{(1/2)} d) / \dots \\
& 2)^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^3 + (N^2 u_3 (2x_3 - 3^{(1/2)} d) \dots \\
& * d) (d/2 - x_1)) / (A_1 \mu_0 * ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 - \dots \\
& (3^{(1/2)} d) / 2)^2) * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / (A_2 \mu_2) + \dots \\
& ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 - (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(1/2)} / \dots \\
& (A_1 \mu_0))^3) / (2 * A_1 * m * \mu_0), 0; \dots \\
& 0, 0, 0, 1; \dots \\
& -((N^2 u_1 x_3 (2d + 2x_1)) / (2 * ((d + x_1)^2 + x_3^2)^{(3/2)} \dots \\
& * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / (A_2 \mu_2) + ((d + x_1)^2 + x_3^2)^{(1/2)} \dots \\
& / (A_1 \mu_0))^2 + (N^2 u_2 (d - 2x_1) (x_3 + (3^{(1/2)} d) / 2)) \dots \\
& / (2 * ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(3/2)} * \dots \\
& (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / (A_2 \mu_2) + ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + \dots \\
& (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(1/2)} / (A_1 \mu_0))^2 + (N^2 u_3 (d - \dots \\
& 2x_1) (x_3 - (3^{(1/2)} d) / 2)) / (2 * ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 - \dots \\
& (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(3/2)} * (L_1 / (A_1 \mu_1) + L_2 / (A_2 \mu_2) + \dots \\
& ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 - (3^{(1/2)} d) / 2)^2)^{(1/2)} / \dots \\
& (A_1 \mu_0))^2 + (N^2 u_2 (d - 2x_1) (x_3 + (3^{(1/2)} d) \dots \\
& / 2)) / (A_1 \mu_0 * ((d/2 - x_1)^2 + (x_3 + (3^{(1/2)} d) / 2)^2) \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * (L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + ((d/2 - x1)^2 + (x3 + \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^3 + (N^2*u3*(d - \dots \\
& 2*x1)*(x3 - (3^{(1/2)*d}/2)))/(A1*\mu0*((d/2 - x1)^2 + \dots \\
& (x3 - (3^{(1/2)*d}/2)^2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + \dots \\
& ((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/(A1*\mu0)\dots \\
&))^3 + (N^2*u1*x3*(2*d + 2*x1))/(A1*\mu0*((d + x1)^2 + \dots \\
& x3^2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + ((d + x1)^2 + \dots \\
& x3^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^3)/(2*A1*m*\mu0) , \dots \\
& 0 , \dots \\
& ((N^2*u1)/(((d + x1)^2 + x3^2)^{(1/2)*(L1/(A1*\mu1) + \dots \\
& L2/(A2*\mu2) + ((d + x1)^2 + x3^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^2) - \dots \\
& (N^2*u3)/(((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)}\dots \\
& *(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + ((d/2 - x1)^2 + (x3 - \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^2) - (N^2*u2)/\dots \\
& (((d/2 - x1)^2 + (x3 + (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)*(L1/\dots \\
& (A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + ((d/2 - x1)^2 + (x3 + \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^2) - (N^2*u1*x3^2)/\dots \\
& (((d + x1)^2 + x3^2)^{(3/2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2)\dots \\
& + ((d + x1)^2 + x3^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^2) + (N^2*u2*\dots \\
& (2*x3 + 3^{(1/2)*d})*(x3 + (3^{(1/2)*d}/2)))/(2*((d/2 - \dots \\
& x1)^2 + (x3 + (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(3/2)*(L1/(A1*\mu1) + \dots \\
& L2/(A2*\mu2) + ((d/2 - x1)^2 + (x3 + (3^{(1/2)*d}/2)\dots \\
& ^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^2) + (N^2*u3*(2*x3 - 3^{(1/2)*d})*\dots \\
& (x3 - (3^{(1/2)*d}/2)))/(2*((d/2 - x1)^2 + (x3 - \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(3/2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2)\dots \\
& + ((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/\dots \\
& (A1*\mu0))^2) - (2*N^2*u1*x3^2)/(A1*\mu0*((d + x1)^2 + \dots \\
& x3^2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + ((d + x1)^2 + \dots \\
& x3^2)^{(1/2)/(A1*\mu0))^3 + (N^2*u2*(2*x3 + 3^{(1/2)*d})\dots \\
& *(x3 + (3^{(1/2)*d}/2)))/(A1*\mu0*((d/2 - x1)^2 + (x3 + \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)^2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + \dots \\
& ((d/2 - x1)^2 + (x3 + (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/\dots \\
& (A1*\mu0))^3 + (N^2*u3*(2*x3 - 3^{(1/2)*d})*(x3 - \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)))/(A1*\mu0*((d/2 - x1)^2 + (x3 - \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)^2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + \dots \\
& ((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/\dots \\
& (A1*\mu0))^3)/(2*A1*m*\mu0) , \dots \\
& 0];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dzdu = & [0,0,0;\dots \\
& -(N^2*(d + x1))/(2*A1*m*\mu0*((d + x1)^2 + x3^2)^{(1/2)}\dots \\
& *(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2) + ((d + x1)^2 + x3^2)^{(1/2)/\dots \\
& (A1*\mu0))^2) , \dots \\
& (N^2*(d/2 - x1))/(2*A1*m*\mu0*((d/2 - x1)^2 + (x3 + \dots \\
& (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)*(L1/(A1*\mu1) + L2/(A2*\mu2)\dots \\
& + ((d/2 - x1)^2 + (x3 + (3^{(1/2)*d}/2)^2)^{(1/2)/\dots
\end{aligned}$$

```

        (A1*mu0)) ^ 2), ...
        (N^2*(d/2 - x1))/(2*A1*m*mu0*((d/2 - x1)^2 + (x3 - ...
        (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)*(L1/(A1*mu1) + L2/(A2*mu2)) ...
        + ((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)/...
        (A1*mu0)) ^ 2); ...
        0,0,0; ...
        (N^2*x3)/(2*A1*m*mu0*((d + x1)^2 + x3^2)^(1/2)*(L1/...
        (A1*mu1) + L2/(A2*mu2) + ((d + x1)^2 + x3^2)^(1/2)/...
        (A1*mu0)) ^ 2), ...
        -(N^2*(x3 + (3^(1/2)*d)/2))/(2*A1*m*mu0*...
        ((d/2 - x1)^2 + (x3 + (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)*...
        (L1/(A1*mu1) + L2/(A2*mu2) + ((d/2 - x1)^2 + ...
        (x3 + (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)/(A1*mu0)) ^ 2), ...
        -(N^2*(x3 - (3^(1/2)*d)/2))/(2*A1*m*mu0*...
        ((d/2 - x1)^2 + (x3 - (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)*...
        (L1/(A1*mu1) + L2/(A2*mu2) + ((d/2 - x1)^2 + ...
        (x3 - (3^(1/2)*d)/2)^2)^(1/2)/(A1*mu0)) ^ 2)];

end

function xk1 = plantFcnDT(xk,uk,Ts)

    % Time spacing params

    M = 10;
    delta = Ts/M;

    % Numeric integration

    xk1 = xk;
    for ct=1:M
        xk1 = xk1 + delta*plantFcn(xk1,uk);
    end

end

function xk1 = plantStateFcn(xk,u)

    % State function for Kalman Filter
    uk = u(1:3);
    Ts = u(4);
    xk1 = plantFcnDT(xk, uk, Ts);

end

function y = plantMeasurementFcn(xk)

```

```
    % Output function for Kalman Filter
    y = [xk(1);xk(3)];
end
```

C.5. Código para el modelo de la planta.

Este código es el contenido en el bloque **Controlled Plant** en las 3 simulaciones.

```
function dxdt = plntModel(x,I)

    % System params
    u0 = 4*pi*10^-7;
    d = 0.05;
    A1 = 0.01;
    m = 0.05;

    % Phi functions values
    phi = phiFunc(x);

    % Output
    dxdt = zeros(4,1);

    dxdt(1) = x(2);
    dxdt(2) = -1/(2*m*u0*A1)*( phi(1)*(x(1)+d)*(I(1)^2) +...
                                phi(2)*(x(1)-d/2)*(I(2)^2) +...
                                phi(3)*(x(1)-d/2)*(I(3)^2) );
    dxdt(3) = x(4);
    dxdt(4) = -1/(2*m*u0*A1)*( phi(1)*(-x(3))*(I(1)^2) +...
                                phi(2)*(x(3)+sqrt(3)*d/2)*(I(2)^2) +...
                                phi(3)*(x(3)-sqrt(3)*d/2)*(I(3)^2) );

end

function phi = phiFunc(x)

    % System params
    u0 = 4*pi*(10^-7);
    u1 = 500*u0;
    u2 = u1;
    L1 = 0.25;
    L2 = 0.03;
    d = 0.05;
    N = 250;
    A1 = 0.01;
    A2 = 0.0003;
```

```

phi = [0 0 0];
phi(1) = N^2 / ...
    ( ( L1/(u1*A1) + L2/(u2*A2) + sqrt((x(1)+d)^2 + x(3)^2) ...
    /(u0*A1) )^2 * ( sqrt((x(1)+d)^2 + x(3)^2) ) );

phi(2) = N^2 / ...
    ( ( L1/(u1*A1) + L2/(u2*A2) + (sqrt((x(1)-d/2)^2 + ...
    (x(3)+ sqrt(3)*d/2)^2))/(u0*A1) )^2 * (sqrt((x(1)-d/2)^2 ...
    + (x(3)+ sqrt(3)*d/2)^2) );

phi(3) = N^2 / ...
    ( ( L1/(u1*A1) + L2/(u2*A2) + sqrt((x(1)-d/2)^2 + ...
    ((x(3)- sqrt(3)*d/2)^2))/(u0*A1) )^2 * (sqrt((x(1)-d/2)^2 ...
    + (x(3)- sqrt(3)*d/2)^2) );

end

```

C.6. Código de transformación de controles para el controlador por Linealización Exacta.

Este código es el contenido del bloque Control Transformation para la simulación del control por linealización exacta.

```
function I = ioTrans(x,v)

    % Free parameter
    w3 = 0.6;

    % System params
    u0 = 4*pi*(10^-7);
    u1 = 500*u0;
    u2 = u1;
    L1 = 0.25;
    L2 = 0.03;
    d = 0.05;
    m = 0.05;
    N = 250;
    A1 = 0.01;
    A2 = 0.0003;

    A = zeros(2,2);
    A(1,1) = (2*m*sqrt(d^2 - x(1)*d + sqrt(3)*...
        x(3)*d + x(1)^2 + x(3)^2)*(sqrt(3)*d - 2*x(3))*...
        (A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0 + u1*sqrt(d^2 - x(1)*d...
        + sqrt(3)*x(3)*d + x(1)^2 + x(3)^2)))^2)/...
        (sqrt(3)*A1*A2^2*d*N^2*(d - 2*x(1))*u0*u1^2*u2^2);

    A(1,2) = -(2*m*sqrt(d^2 - x(1)*d + sqrt(3)*...
        x(3)*d + x(1)^2 + x(3)^2))*...
        (A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0 + u1*sqrt(d^2 - x(1)*d...
        + sqrt(3)*x(3)*d + x(1)^2 + x(3)^2)))^2)/...
        (sqrt(3)*A1*A2^2*d*N^2*u0*u1^2*u2^2);

    A(2,1) = (2*m*sqrt(d^2 - x(1)*d - sqrt(3)*...
        x(3)*d + x(1)^2 + x(3)^2)*(sqrt(3)*d + 2*x(3))*...
        (A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0 + u1*sqrt(d^2 - x(1)*d...
        - sqrt(3)*x(3)*d + x(1)^2 + x(3)^2)))^2)/...
        (sqrt(3)*A1*A2^2*d*N^2*(d - 2*x(1))*u0*u1^2*u2^2);

    A(2,2) = (2*m*sqrt(d^2 - x(1)*d - sqrt(3)*...
        x(3)*d + x(1)^2 + x(3)^2))*...
        (A1*L2*u0*u1 + A2*u2*(L1*u0 + u1*sqrt(d^2 - x(1)*d...
```

$$- \sqrt{3} * x(3) * d + x(1)^2 + x(3)^2)) ^2) / \dots$$

$$(\sqrt{3} * A1 * A2^2 * d * N^2 * u0 * u1^2 * u2^2);$$

$$w = A * v;$$

$$N13 = \sqrt{3} * d * (d - 2 * x(1)) * \sqrt{(d + x(1))^2 + x(3)^2} * \dots$$

$$(A1 * L2 * u0 * u1 + A2 * u2 * (L1 * u0 + u1 * \sqrt{(d + x(1))^2 + \dots}$$

$$x(3)^2)) ^2);$$

$$N23 = (\sqrt{3} * d^2 + \sqrt{3} * x(1) * d - x(3) * d - 4 * x(1) * x(3)) * \dots$$

$$\sqrt{d^2 - x(1) * d + \sqrt{3} * x(3) * d + x(1)^2 + x(3)^2} * \dots$$

$$(A1 * L2 * u0 * u1 + A2 * u2 * (L1 * u0 + u1 * \sqrt{d^2 - x(1) * d + \dots}$$

$$\sqrt{3} * x(3) * d + x(1)^2 + x(3)^2)) ^2);$$

$$D = (\sqrt{3} * d^2 + (\sqrt{3} * x(1) + x(3)) * d + 4 * x(1) * x(3)) * \dots$$

$$\sqrt{d^2 - x(1) * d - \sqrt{3} * x(3) * d + x(1)^2 + x(3)^2} * \dots$$

$$(A1 * L2 * u0 * u1 + A2 * u2 * (L1 * u0 + u1 * \sqrt{d^2 - x(1) * d - \dots}$$

$$\sqrt{3} * x(3) * d + x(1)^2 + x(3)^2)) ^2);$$

$$Beta = [0 \ 0 \ N13/D \ ; \ 1 \ 0 \ N23/D \ ; \ 0 \ 1 \ 1 \];$$

$$I = (Beta * [w; w3]);$$

end

D. Ficheros Mathematica

En este apéndice se muestran los ficheros Mathematica utilizados en este trabajo.

En `Estabilidad.nb` se estudia la estabilidad del sistema (2.18) mediante el 1r Método de Lyapunov.

En `LinAprox.nb` se obtiene el modelo lineal aproximado de (2.18) en el origen, y se comprueba su controlabilidad.

En `LinExact.nb` se obtiene la transformación en los controles y el cambio de coordenadas usada en la linealización entrada-estado de (2.18), comprobando todas las condiciones que se dictan en el Apéndice A.

D.1. Estabilidad.nb

```

In[1]:= xp1 = x2;
xp2 = -1 / (2 m μ0 A1)
(φ1[x1, x3] (x1 + d) I1^2 + φ2[x1, x3] (x1 - d/2) I2^2 + φ3[x1, x3] (x1 - d/2) I3^2);
xp3 = x4;
xp4 = -1 / (2 m μ0 A1) (φ1[x1, x3] (-x3) I1^2 +
φ2[x1, x3] (x3 + Sqrt[3] / 2 d) I2^2 + φ3[x1, x3] (x3 - Sqrt[3] / 2 d) I3^2);

In[5]:= φ1[x1_, x3_] = N1^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) + Sqrt[(x1 + d)^2 + x3^2] / (μ0 A1))^2
Sqrt[(x1 + d)^2 + x3^2]);

φ2[x1_, x3_] = N2^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) +
Sqrt[(x1 - d/2)^2 + (x3 + Sqrt[3] / 2 d)^2] / (μ0 A1))^2
Sqrt[(x1 - d/2)^2 + (x3 + Sqrt[3] / 2 d)^2]);

φ3[x1_, x3_] = N3^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) +
Sqrt[(x1 - d/2)^2 + (x3 - Sqrt[3] / 2 d)^2] / (μ0 A1))^2
Sqrt[(x1 - d/2)^2 + (x3 - Sqrt[3] / 2 d)^2]);

----- PUNTOS EQUILIBRIO :

In[12]:= xp20 = xp2 /. {x1 → 0, x2 → 0, x3 → 0, x4 → 0} // Factor
Out[12]= - (A1 A2^2 d (2 I1^2 - I2^2 - I3^2) NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 Sqrt[d^2] m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 Sqrt[d^2] μ1 μ2)^2)

In[13]:= xp40 = xp4 /. {x1 → 0, x2 → 0, x3 → 0, x4 → 0} // Factor
Out[13]= - (Sqrt[3] A1 A2^2 d (I2 - I3) (I2 + I3) NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 Sqrt[d^2] m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 Sqrt[d^2] μ1 μ2)^2)

In[10]:= N1 = N2 = N3 = NN;

In[14]:= {xp20, xp40} // Factor
Out[14]= { - (A1 A2^2 d (2 I1^2 - I2^2 - I3^2) NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 Sqrt[d^2] m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 Sqrt[d^2] μ1 μ2)^2),
- (Sqrt[3] A1 A2^2 d (I2 - I3) (I2 + I3) NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 Sqrt[d^2] m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 Sqrt[d^2] μ1 μ2)^2) }

Equilibrio :

In[15]:= xa = {0, 0, 0, 0}; ua = {II, II, II};

```

```

In[16]:= Dfx =
  {{D[xp1, x1], D[xp1, x2], D[xp1, x3], D[xp1, x4]}, {D[xp2, x1], D[xp2, x2], D[xp2, x3],
    D[xp2, x4]}, {D[xp3, x1], D[xp3, x2], D[xp3, x3], D[xp3, x4]},
    {D[xp4, x1], D[xp4, x2], D[xp4, x3], D[xp4, x4]}} /.
  {x1 -> xa[[1]], x2 -> xa[[2]], x3 -> xa[[3]], x4 -> xa[[4]]} /.
  {I1 -> II, I2 -> II, I3 -> II} // Factor
    factoriza

Out[16]= {{0, 1, 0, 0}, {- (3 A1 A2^2 II^2 NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 - A2 √d^2 μ1 μ2)
    4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 √d^2 μ1 μ2)^3, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0, 1}, {0, 0, (A1 A2^2 II^2 NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + 7 A2 √d^2 μ1 μ2)
    4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 √d^2 μ1 μ2)^3, 0}}

In[20]:= Dfx = {{0, 1, 0, 0},
  {- (3 A1 A2^2 II^2 NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 - A2 d μ1 μ2)
    4 d m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^3, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1},
  {0, 0, (A1 A2^2 II^2 NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + 7 A2 d μ1 μ2)
    4 d m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^3, 0}} // Factor
    factoriza

Out[20]= {{0, 1, 0, 0}, {- (3 A1 A2^2 II^2 NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 - A2 d μ1 μ2)
    4 d m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^3, 0, 0, 0},
  {0, 0, 0, 1}, {0, 0, (A1 A2^2 II^2 NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + 7 A2 d μ1 μ2)
    4 d m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^3, 0}}

In[21]:= Eigenvalues[Dfx]
    autovalores

Out[21]= {- (i √3 √A1 A2 II NN √μ0 μ1 μ2 √A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 - A2 d μ1 μ2)
    2 √d √m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^{3/2},
  i √3 √A1 A2 II NN √μ0 μ1 μ2 √A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 - A2 d μ1 μ2
    2 √d √m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^{3/2},
  - (√A1 A2 II NN √μ0 μ1 μ2 √A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + 7 A2 d μ1 μ2)
    2 √d √m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^{3/2},
  (√A1 A2 II NN √μ0 μ1 μ2 √A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + 7 A2 d μ1 μ2)
    2 √d √m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 L1 μ0 μ2 + A2 d μ1 μ2)^{3/2}}

```

D.2. LinAprox.nb

```

In[1]:= xp1 = x2;
xp2 = -1 / (2 m μ0 A1)
  (φ1[x1, x3] (x1 + d) u1 + φ2[x1, x3] (x1 - d / 2) u2 + φ3[x1, x3] (x1 - d / 2) u3);
xp3 = x4;
xp4 = -1 / (2 m μ0 A1) (φ1[x1, x3] (-x3) u1 +
  φ2[x1, x3] (x3 + Sqrt[3] / 2 d) u2 + φ3[x1, x3] (x3 - Sqrt[3] / 2 d) u3);

In[5]:= φ1[x1_, x3_] = N1^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) + Sqrt[(x1 + d)^2 + x3^2] / (μ0 A1))^2
  Sqrt[(x1 + d)^2 + x3^2]);

φ2[x1_, x3_] = N2^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) +
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 + Sqrt[3] / 2 d)^2] / (μ0 A1))^2
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 + Sqrt[3] / 2 d)^2]);

φ3[x1_, x3_] = N3^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) +
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 - Sqrt[3] / 2 d)^2] / (μ0 A1))^2
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 - Sqrt[3] / 2 d)^2]);

N1 =
N2 =
N3 =
NN;

In[9]:= JacX =
  {{D[xp1, x1], D[xp1, x2], D[xp1, x3], D[xp1, x4]}, {D[xp2, x1], D[xp2, x2], D[xp2, x3],
  D[xp2, x4]}, {D[xp3, x1], D[xp3, x2], D[xp3, x3], D[xp3, x4]},
  {D[xp4, x1], D[xp4, x2], D[xp4, x3], D[xp4, x4]}} /.
  {x1 → 0, x2 → 0, x3 → 0, x4 → 0, u1 → uI, u2 → uI, u3 → uI} // Simplify

Out[9]= {{0, 1, 0, 0}, {- (3 A1 A2^2 NN^2 uI μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 - √d^2 μ1) μ2)) /
  (4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √d^2 μ1) μ2)^3)}, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1},
  {0, 0, (A1 A2^2 NN^2 uI μ0 μ1^2 μ2^2 (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + 7 √d^2 μ1) μ2)) /
  (4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √d^2 μ1) μ2)^3), 0}}

```

```

In[10]:= JacU = { {D[xp1, u1], D[xp1, u2], D[xp1, u3]}, {D[xp2, u1], D[xp2, u2], D[xp2, u3]},
  {D[xp3, u1], D[xp3, u2], D[xp3, u3]}, {D[xp4, u1], D[xp4, u2], D[xp4, u3]} } /.
  {x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> 0, x4 -> 0, u1 -> uI, u2 -> uI, u3 -> uI} // Simplify

Out[10]= { {0, 0, 0}, { - (A1 A2^2 d NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (2 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √d^2 μ1) μ2)^2),
  (A1 A2^2 d NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √d^2 μ1) μ2)^2),
  (A1 A2^2 d NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √d^2 μ1) μ2)^2) },
  {0, 0, 0}, {0, - (√3 A1 A2^2 d NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √d^2 μ1) μ2)^2),
  (√3 A1 A2^2 d NN^2 μ0 μ1^2 μ2^2) / (4 √d^2 m (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √d^2 μ1) μ2)^2) } }

In[11]:= A = JacX;
  B = JacU;

```

$$\begin{aligned}
\text{In[13]:= } & \mathbf{AB = A.B} \\
& \mathbf{A2B = (A^2).B} \\
& \mathbf{A3B = (A^3).B} \\
\text{Out[13]= } & \left\{ \left\{ -\frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \right. \\
& \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\
& \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2} \left. \right\}, \\
& \{ \theta, \theta, \theta \}, \left\{ \theta, -\frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \\
& \frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2} \left. \right\}, \{ \theta, \theta, \theta \} \} \\
\text{Out[14]= } & \left\{ \left\{ -\frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \right. \\
& \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\
& \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2} \left. \right\}, \\
& \{ \theta, \theta, \theta \}, \left\{ \theta, -\frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \\
& \frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2} \left. \right\}, \{ \theta, \theta, \theta \} \} \\
\text{Out[15]= } & \left\{ \left\{ -\frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \right. \\
& \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\
& \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2} \left. \right\}, \\
& \{ \theta, \theta, \theta \}, \left\{ \theta, -\frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \\
& \frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2} \left. \right\}, \{ \theta, \theta, \theta \} \}
\end{aligned}$$

In[16]:= **U = Join[B, AB, A2B, A3B, 2]**

Junta

$$\begin{aligned} \text{Out[16]} = & \left\{ \left\{ \theta, \theta, \theta, - \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \right. \\ & \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & - \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & - \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & - \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \left. \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2} \right\}, \\ & \left\{ - \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{2 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \\ & \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \left. \frac{A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \theta, \theta, \theta, \theta, \theta, \theta, \theta, \theta \right\}, \\ & \left\{ \theta, \theta, \theta, \theta, - \frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \right. \\ & \frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \theta, \\ & - \frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \\ & \left. \frac{\sqrt{3} A1 A2^2 d NN^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2}{4 \sqrt{d^2} m \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2}, \theta, \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{3} \text{ A1 A2}^2 \text{ d NN}^2 \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^2}{4 \sqrt{\text{d}^2} \text{ m} \left(\text{A1 L2 } \mu_0 \mu_1 + \text{A2} \left(\text{L1 } \mu_0 + \sqrt{\text{d}^2} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2}, \\
& \frac{\sqrt{3} \text{ A1 A2}^2 \text{ d NN}^2 \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^2}{4 \sqrt{\text{d}^2} \text{ m} \left(\text{A1 L2 } \mu_0 \mu_1 + \text{A2} \left(\text{L1 } \mu_0 + \sqrt{\text{d}^2} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2}, \\
& \left\{ 0, - \frac{\sqrt{3} \text{ A1 A2}^2 \text{ d NN}^2 \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^2}{4 \sqrt{\text{d}^2} \text{ m} \left(\text{A1 L2 } \mu_0 \mu_1 + \text{A2} \left(\text{L1 } \mu_0 + \sqrt{\text{d}^2} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2}, \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{3} \text{ A1 A2}^2 \text{ d NN}^2 \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^2}{4 \sqrt{\text{d}^2} \text{ m} \left(\text{A1 L2 } \mu_0 \mu_1 + \text{A2} \left(\text{L1 } \mu_0 + \sqrt{\text{d}^2} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}
\end{aligned}$$

```

In[17]:= Dimensions[U]
          dimensiones
Out[17]= {4, 12}

In[18]:=  $\mu_0 = 4 * \text{Pi} * 10^{-7};$ 
          número pi
 $\mu_1 = \mu_2 = 500 \mu_0;$ 
d = 0.05;
L1 = 0.25;
L2 = 0.03;
A1 = 0.01;
A2 = 0.0003;
NN = 250;
m = 0.05;

In[27]:= U
Out[27]= {{0, 0, 0, -2.84952, 1.42476, 1.42476, -2.84952, 1.42476, 1.42476, -2.84952,
1.42476, 1.42476}, {-2.84952, 1.42476, 1.42476, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, -2.46775, 2.46775, 0, -2.46775, 2.46775, 0, -2.46775, 2.46775},
{0, -2.46775, 2.46775, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}}

In[28]:= MatrixRank[U]
          rango matricial
Out[28]= 4

```


D.3. LinExact.nb

```

In[ ]:= xp1 = x2;
xp2 =
  -1 / (2 m μ0 A1) (φ1[x1, x3] D21[x1] u1 + φ2[x1, x3] D22[x1] u2 + φ3[x1, x3] D23[x1] u3);
xp3 = x4;
xp4 =
  -1 / (2 m μ0 A1) (φ1[x1, x3] D41[x3] u1 + φ2[x1, x3] D42[x3] u2 + φ3[x1, x3] D43[x3] u3);

In[ ]:= D21[x1_] = x1 + d;
D22[x1_] = x1 - d / 2;
D23[x1_] = x1 - d / 2;
D41[x3_] = -x3;
D42[x3_] = x3 + Sqrt[3] / 2 d;
D43[x3_] = x3 - Sqrt[3] / 2 d;

In[ ]:= φ1[x1_, x3_] = N1^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) + Sqrt[(x1 + d)^2 + x3^2] / (μ0 A1))^2
  Sqrt[(x1 + d)^2 + x3^2]);
φ2[x1_, x3_] = N2^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) +
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 + Sqrt[3] / 2 d)^2] / (μ0 A1))^2
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 + Sqrt[3] / 2 d)^2]);
φ3[x1_, x3_] = N3^2 / ((L1 / (μ1 A1) + L2 / (μ2 A2) +
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 - Sqrt[3] / 2 d)^2] / (μ0 A1))^2
  Sqrt[(x1 - d / 2)^2 + (x3 - Sqrt[3] / 2 d)^2]);

N1 =
N2 =
N3 =
NN;

In[ ]:= xa = {0, 0, 0, 0}; ua = {II^2, II^2, II^2};

-----

In[ ]:= f = {xp1, xp2, xp3, xp4} /. {u1 → 0, u2 → 0, u3 → 0};
g1 = ({xp1, xp2, xp3, xp4} - f) / u1 /. {u2 → 0, u3 → 0} // Simplify;
g2 = ({xp1, xp2, xp3, xp4} - f) / u2 /. {u1 → 0, u3 → 0} // Simplify;
g3 = ({xp1, xp2, xp3, xp4} - f) / u3 /. {u1 → 0, u2 → 0} // Simplify;

In[ ]:= {xp1, xp2, xp3, xp4} - (f + u1 g1 + u2 g2 + u3 g3) // Factor

Out[ ]:= {0, 0, 0, 0}

```

In[]:= **g = Transpose[{g1, g2, g3}]**
 [transposición]

$$\begin{aligned} \text{Out[]} = & \left\{ \{0, 0, 0\}, \left\{ - \left(\frac{A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2}{2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 L1 \mu 0 \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2} \right), \right. \right. \\ & \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\ & \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \\ & \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\ & \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \left. \right\}, \\ & \{0, 0, 0\}, \left\{ \frac{A1 A2^2 NN^2 x3 \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2}{2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 L1 \mu 0 \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2} \right\}, \\ & - \left(\frac{A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2}{4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\ & \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \left. \right\}, \\ & \left(\frac{A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d - 2 x3) \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2}{4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\ & \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

In[]:= **p = MatrixRank[g /. {x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> 0, x4 -> 0}]**
 [rango matricial]

Out[]:= 2

--- β es 3×3 , g es 4×2 (con 1 columnas ceros en gpp)

In[]:= **$\beta = \{\{\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}\}, \{\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}\}, \{\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}\}\};$**
 $gpp = \{\{gp_{11}, gp_{12}, 0\}, \{gp_{21}, gp_{22}, 0\}, \{gp_{31}, gp_{32}, 0\}, \{gp_{41}, gp_{42}, 0\}\};$

Ahora resolvemos la equaión matricial **$gpp = g\beta$**

In[]:= **eq = gpp - g. β**

$$\begin{aligned} \text{Out[]} = & \left\{ \{gp_{11}, gp_{12}, 0\}, \left\{ gp_{21} + \frac{A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta_{11} \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2}{2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 L1 \mu 0 \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2} \right. \right. \\ & \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta_{21} \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\ & \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 31 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \\
& gp22 + \left(A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta 12 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \\
& \quad \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 22 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 32 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta 13 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 23 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 33 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \}, \\
& \{ gp31, gp32, \theta \}, \{ gp41 - \left(A1 A2^2 NN^2 x3 \beta 11 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \\
& \quad \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) + \\
& \quad \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \beta 21 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \quad \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d - 2 x3) \beta 31 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \\
& gp42 - \left(A1 A2^2 NN^2 x3 \beta 12 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \Big) + \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d + 2 x3 \right) \beta 22 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) \Big/ \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d - 2 x3 \right) \beta 32 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) \Big/ \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \Big), \\
& - \left((A1 A2^2 NN^2 x3 \beta 13 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2) \Big/ \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) \right) + \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d + 2 x3 \right) \beta 23 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) \Big/ \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d - 2 x3 \right) \beta 33 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) \Big/ \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \Big) \Big\} \Big\}
\end{aligned}$$

$$In[] := \text{gp11} = \text{gp12} = \text{gp31} = \text{gp32} = \theta;$$

$$In[] := \text{eq}$$

$$\begin{aligned}
Out[] := & \{ \{ \theta, \theta, \theta \}, \{ \text{gp21} + (A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta 11 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2) \Big/ \\
& \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 21 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) \Big/ \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 31 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) \Big/ \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \Big), \\
& \text{gp22} + (A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta 12 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2) \Big/ \\
& \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta 22 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) \Big/ \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (d - 2 \, x1) \, \beta32 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(4 \, m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big), \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (d + x1) \, \beta13 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(2 \, m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \, L1 \, \mu0 \, \mu2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \, \mu1 \, \mu2 \right)^2 \Big) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (d - 2 \, x1) \, \beta23 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(4 \, m \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (d - 2 \, x1) \, \beta33 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(4 \, m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big) \Big\}, \\
& \{0, 0, 0\}, \{gp41 - (A1 \, A2^2 \, NN^2 \, x3 \, \beta11 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2) \Big/ \\
& \left(2 \, m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \, L1 \, \mu0 \, \mu2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \, \mu1 \, \mu2 \right)^2 \right) + \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (\sqrt{3} \, d + 2 \, x3) \, \beta21 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(4 \, m \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (\sqrt{3} \, d - 2 \, x3) \, \beta31 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(4 \, m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big), \\
& gp42 - (A1 \, A2^2 \, NN^2 \, x3 \, \beta12 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2) \Big/ \left(2 \, m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \, L1 \, \mu0 \, \mu2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \, \mu1 \, \mu2 \right)^2 \Big) + \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (\sqrt{3} \, d + 2 \, x3) \, \beta22 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(4 \, m \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, NN^2 \, (\sqrt{3} \, d - 2 \, x3) \, \beta32 \, \mu0 \, \mu1^2 \, \mu2^2 \right) \Big/ \left(4 \, m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \right) \\
& \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \mathbf{x3} \beta_{13} \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^2 \right) / \left(2 \mathbf{m} \sqrt{(\mathbf{d} + \mathbf{x1})^2 + \mathbf{x3}^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu_0 \mu_1 + \mathbf{A2} \mathbf{L1} \mu_0 \mu_2 + \mathbf{A2} \sqrt{(\mathbf{d} + \mathbf{x1})^2 + \mathbf{x3}^2} \mu_1 \mu_2 \right)^2 \right) \right) + \\
& \quad \left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \left(\sqrt{3} \mathbf{d} + 2 \mathbf{x3} \right) \beta_{23} \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^2 \right) / \left(4 \mathbf{m} \sqrt{\mathbf{d}^2 - \mathbf{d} \mathbf{x1} + \mathbf{x1}^2 + \sqrt{3} \mathbf{d} \mathbf{x3} + \mathbf{x3}^2} \right. \\
& \quad \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu_0 \mu_1 + \mathbf{A2} \left(\mathbf{L1} \mu_0 + \sqrt{\mathbf{d}^2 - \mathbf{d} \mathbf{x1} + \mathbf{x1}^2 + \sqrt{3} \mathbf{d} \mathbf{x3} + \mathbf{x3}^2} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2 \right) - \\
& \quad \left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \left(\sqrt{3} \mathbf{d} - 2 \mathbf{x3} \right) \beta_{33} \mu_0 \mu_1^2 \mu_2^2 \right) / \left(4 \mathbf{m} \sqrt{\mathbf{d}^2 + \mathbf{x1}^2 + \mathbf{x3}^2 - \mathbf{d} \left(\mathbf{x1} + \sqrt{3} \mathbf{x3} \right)} \right. \\
& \quad \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu_0 \mu_1 + \mathbf{A2} \left(\mathbf{L1} \mu_0 + \sqrt{\mathbf{d}^2 + \mathbf{x1}^2 + \mathbf{x3}^2 - \mathbf{d} \left(\mathbf{x1} + \sqrt{3} \mathbf{x3} \right)} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2 \right) \} \} \\
\text{In}[*]:= & \text{gp21} = - \left(+ \frac{(\mathbf{d} + \mathbf{x1}) \beta_{11} \phi_1[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{2 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} - \frac{(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1}) \beta_{21} \phi_2[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} - \frac{(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1}) \beta_{31} \phi_3[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} \right); \\
\text{gp22} = & - \left(\frac{(\mathbf{d} + \mathbf{x1}) \beta_{12} \phi_1[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{2 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} - \frac{(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1}) \beta_{22} \phi_2[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} - \frac{(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1}) \beta_{32} \phi_3[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} \right); \\
\text{gp41} = & - \left(- \frac{\mathbf{x3} \beta_{11} \phi_1[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{2 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} + \frac{(\sqrt{3} \mathbf{d} + 2 \mathbf{x3}) \beta_{21} \phi_2[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} - \frac{(\sqrt{3} \mathbf{d} - 2 \mathbf{x3}) \beta_{31} \phi_3[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} \right); \\
\text{gp42} = & - \left(- \frac{\mathbf{x3} \beta_{12} \phi_1[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{2 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} + \frac{(\sqrt{3} \mathbf{d} + 2 \mathbf{x3}) \beta_{22} \phi_2[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} - \frac{(\sqrt{3} \mathbf{d} - 2 \mathbf{x3}) \beta_{32} \phi_3[\mathbf{x1}, \mathbf{x3}]}{4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \mu_0} \right); \\
\text{In}[*]:= & \text{eq} \\
\text{Out}[*]:= & \{ \{ \emptyset, \emptyset, \emptyset \}, \\
& \left\{ - \left((\mathbf{NN}^2 (\mathbf{d} + \mathbf{x1}) \beta_{11}) / \left(2 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{(\mathbf{d} + \mathbf{x1})^2 + \mathbf{x3}^2} \mu_0 \left(\frac{\sqrt{(\mathbf{d} + \mathbf{x1})^2 + \mathbf{x3}^2}}{\mathbf{A1} \mu_0} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1} \mu_1} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2} \mu_2} \right)^2 \right) \right) + \right. \\
& \quad \left(\mathbf{NN}^2 (\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1}) \beta_{31} \right) / \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3} \right)^2} \mu_0 \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3} \right)^2}}{\mathbf{A1} \mu_0} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1} \mu_1} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2} \mu_2} \right)^2 \right) \right) + (\mathbf{NN}^2 (\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1}) \beta_{21}) / \right. \\
& \quad \left. \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3} \right)^2} \mu_0 \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3} \right)^2}}{\mathbf{A1} \mu_0} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1} \mu_1} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2} \mu_2} \right)^2 \right) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta11 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \\
& \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 L1 \mu0 \mu2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu1 \mu2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta21 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta31 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right), \\
& - \left(NN^2 (d + x1) \beta12 \right) / \left(2 A1 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu0 \left(\frac{\sqrt{(d + x1)^2 + x3^2}}{A1 \mu0} + \frac{L1}{A1 \mu1} + \frac{L2}{A2 \mu2} \right)^2 \right) + \\
& \left(NN^2 (d - 2 x1) \beta32 \right) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \mu0 \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu0} + \frac{L1}{A1 \mu1} + \frac{L2}{A2 \mu2} \right)^2 \right) + \left(NN^2 (d - 2 x1) \beta22 \right) / \\
& \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \mu0 \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu0} + \frac{L1}{A1 \mu1} + \frac{L2}{A2 \mu2} \right)^2 \right) + \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta12 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \\
& \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 L1 \mu0 \mu2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu1 \mu2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta22 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta32 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \quad \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right), \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \beta13 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(A1 L2 \mu\theta \mu1 + A2 L1 \mu\theta \mu2 + A2 \sqrt{(d+x1)^2+x3^2} \mu1 \mu2 \right)^2 - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d-2x1) \beta23 \mu\theta \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2-dx1+x1^2+\sqrt{3} dx3+x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu\theta \mu1 + A2 \left(L1 \mu\theta + \sqrt{d^2-dx1+x1^2+\sqrt{3} dx3+x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d-2x1) \beta33 \mu\theta \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2+x1^2+x3^2-d(x1+\sqrt{3} x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu\theta \mu1 + A2 \left(L1 \mu\theta + \sqrt{d^2+x1^2+x3^2-d(x1+\sqrt{3} x3)} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) \Bigg\}, \\
& \{\theta, \theta, \theta\}, \left\{ \frac{NN^2 x3 \beta11}{2 A1 m \sqrt{(d+x1)^2+x3^2} \mu\theta \left(\frac{\sqrt{(d+x1)^2+x3^2}}{A1 \mu\theta} + \frac{L1}{A1 \mu1} + \frac{L2}{A2 \mu2} \right)^2} + \right. \\
& \left. \left(NN^2 (\sqrt{3} d-2x3) \beta31 \right) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \mu\theta \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu\theta} + \frac{L1}{A1 \mu1} + \frac{L2}{A2 \mu2} \right)^2 \right) - \left(NN^2 (\sqrt{3} d+2x3) \beta21 \right) / \right. \\
& \left. \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \mu\theta \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu\theta} + \frac{L1}{A1 \mu1} + \frac{L2}{A2 \mu2} \right)^2 \right) - \right. \\
& \left. \left(A1 A2^2 NN^2 x3 \beta11 \mu\theta \mu1^2 \mu2^2 \right) / \right. \\
& \left. \left(2 m \sqrt{(d+x1)^2+x3^2} \left(A1 L2 \mu\theta \mu1 + A2 L1 \mu\theta \mu2 + A2 \sqrt{(d+x1)^2+x3^2} \mu1 \mu2 \right)^2 \right) + \right. \\
& \left. \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d+2x3) \beta21 \mu\theta \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2-dx1+x1^2+\sqrt{3} dx3+x3^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 L2 \mu\theta \mu1 + A2 \left(L1 \mu\theta + \sqrt{d^2-dx1+x1^2+\sqrt{3} dx3+x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) - \right. \\
& \left. \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d-2x3) \beta31 \mu\theta \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2+x1^2+x3^2-d(x1+\sqrt{3} x3)} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 L2 \mu\theta \mu1 + A2 \left(L1 \mu\theta + \sqrt{d^2+x1^2+x3^2-d(x1+\sqrt{3} x3)} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) \right), \\
& \frac{NN^2 x3 \beta12}{2 A1 m \sqrt{(d+x1)^2+x3^2} \mu\theta \left(\frac{\sqrt{(d+x1)^2+x3^2}}{A1 \mu\theta} + \frac{L1}{A1 \mu1} + \frac{L2}{A2 \mu2} \right)^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \, d - 2 \, x3 \right) \beta_{32} \right) / \left(4 \, A1 \, m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} \, d}{2} + x3 \right)^2} \mu \theta \right. \\
& \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} \, d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \, \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \, \mu 1} + \frac{L2}{A2 \, \mu 2} \right)^2 \right) - \left(\text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \, d + 2 \, x3 \right) \beta_{22} \right) / \\
& \left(4 \, A1 \, m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \, d}{2} + x3 \right)^2} \mu \theta \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \, d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \, \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \, \mu 1} + \frac{L2}{A2 \, \mu 2} \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, \text{NN}^2 \, x3 \, \beta_{12} \, \mu \theta \, \mu 1^2 \, \mu 2^2 \right) / \\
& \left(2 \, m \sqrt{\left(d + x1 \right)^2 + x3^2} \left(A1 \, L2 \, \mu \theta \, \mu 1 + A2 \, L1 \, \mu \theta \, \mu 2 + A2 \sqrt{\left(d + x1 \right)^2 + x3^2} \, \mu 1 \, \mu 2 \right)^2 \right) + \\
& \left(A1 \, A2^2 \, \text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \, d + 2 \, x3 \right) \beta_{22} \, \mu \theta \, \mu 1^2 \, \mu 2^2 \right) / \left(4 \, m \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 \, L2 \, \mu \theta \, \mu 1 + A2 \left(L1 \, \mu \theta + \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \, \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, \text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \, d - 2 \, x3 \right) \beta_{32} \, \mu \theta \, \mu 1^2 \, \mu 2^2 \right) / \left(4 \, m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} \, x3 \right)} \right. \\
& \left. \left(A1 \, L2 \, \mu \theta \, \mu 1 + A2 \left(L1 \, \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} \, x3 \right)} \, \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \\
& - \left(\left(A1 \, A2^2 \, \text{NN}^2 \, x3 \, \beta_{13} \, \mu \theta \, \mu 1^2 \, \mu 2^2 \right) / \left(2 \, m \sqrt{\left(d + x1 \right)^2 + x3^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 \, L2 \, \mu \theta \, \mu 1 + A2 \, L1 \, \mu \theta \, \mu 2 + A2 \sqrt{\left(d + x1 \right)^2 + x3^2} \, \mu 1 \, \mu 2 \right)^2 \right) \right) + \\
& \left(A1 \, A2^2 \, \text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \, d + 2 \, x3 \right) \beta_{23} \, \mu \theta \, \mu 1^2 \, \mu 2^2 \right) / \left(4 \, m \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 \, L2 \, \mu \theta \, \mu 1 + A2 \left(L1 \, \mu \theta + \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \, \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 \, A2^2 \, \text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \, d - 2 \, x3 \right) \beta_{33} \, \mu \theta \, \mu 1^2 \, \mu 2^2 \right) / \left(4 \, m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} \, x3 \right)} \right. \\
& \left. \left(A1 \, L2 \, \mu \theta \, \mu 1 + A2 \left(L1 \, \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} \, x3 \right)} \, \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \} \} \\
\text{In}[] := & \beta_{12} = \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{31} = 0; \beta_{21} = \beta_{32} = \beta_{33} = 1; \\
\text{In}[] := & \text{eq} \\
\text{Out}[] := & \{ \{ \theta, \theta, \theta \}, \{ (\text{NN}^2 (d - 2 \, x1)) / \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3}\right)^2} \mu \mathbf{\theta} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3}\right)^2}}{\mathbf{A1} \mu \mathbf{\theta}} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1} \mu \mathbf{1}} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2} \mu \mathbf{2}} \right)^2 - \right. \\
& \left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \left(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1} \right) \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1}^2 \mu \mathbf{2}^2 \right) / \left(4 \mathbf{m} \sqrt{\mathbf{d}^2 - \mathbf{d} \mathbf{x1} + \mathbf{x1}^2 + \sqrt{3} \mathbf{d} \mathbf{x3} + \mathbf{x3}^2} \right. \\
& \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1} + \mathbf{A2} \left(\mathbf{L1} \mu \mathbf{\theta} + \sqrt{\mathbf{d}^2 - \mathbf{d} \mathbf{x1} + \mathbf{x1}^2 + \sqrt{3} \mathbf{d} \mathbf{x3} + \mathbf{x3}^2} \mu \mathbf{1} \right) \mu \mathbf{2} \right)^2 \right), \\
& \left(\mathbf{NN}^2 \left(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1} \right) \right) / \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3}\right)^2} \mu \mathbf{\theta} \right. \\
& \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3}\right)^2}}{\mathbf{A1} \mu \mathbf{\theta}} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1} \mu \mathbf{1}} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2} \mu \mathbf{2}} \right)^2 \right) - \\
& \left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \left(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1} \right) \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1}^2 \mu \mathbf{2}^2 \right) / \left(4 \mathbf{m} \sqrt{\mathbf{d}^2 + \mathbf{x1}^2 + \mathbf{x3}^2 - \mathbf{d} \left(\mathbf{x1} + \sqrt{3} \mathbf{x3} \right)} \right. \\
& \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1} + \mathbf{A2} \left(\mathbf{L1} \mu \mathbf{\theta} + \sqrt{\mathbf{d}^2 + \mathbf{x1}^2 + \mathbf{x3}^2 - \mathbf{d} \left(\mathbf{x1} + \sqrt{3} \mathbf{x3} \right)} \mu \mathbf{1} \right) \mu \mathbf{2} \right)^2 \right), \\
& \left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \left(\mathbf{d} + \mathbf{x1} \right) \beta \mathbf{13} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1}^2 \mu \mathbf{2}^2 \right) / \left(2 \mathbf{m} \sqrt{\left(\mathbf{d} + \mathbf{x1} \right)^2 + \mathbf{x3}^2} \right. \\
& \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1} + \mathbf{A2} \mathbf{L1} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{2} + \mathbf{A2} \sqrt{\left(\mathbf{d} + \mathbf{x1} \right)^2 + \mathbf{x3}^2} \mu \mathbf{1} \mu \mathbf{2} \right)^2 \right) - \\
& \left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \left(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1} \right) \beta \mathbf{23} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1}^2 \mu \mathbf{2}^2 \right) / \left(4 \mathbf{m} \sqrt{\mathbf{d}^2 - \mathbf{d} \mathbf{x1} + \mathbf{x1}^2 + \sqrt{3} \mathbf{d} \mathbf{x3} + \mathbf{x3}^2} \right. \\
& \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1} + \mathbf{A2} \left(\mathbf{L1} \mu \mathbf{\theta} + \sqrt{\mathbf{d}^2 - \mathbf{d} \mathbf{x1} + \mathbf{x1}^2 + \sqrt{3} \mathbf{d} \mathbf{x3} + \mathbf{x3}^2} \mu \mathbf{1} \right) \mu \mathbf{2} \right)^2 \right) - \\
& \left(\mathbf{A1} \mathbf{A2}^2 \mathbf{NN}^2 \left(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1} \right) \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1}^2 \mu \mathbf{2}^2 \right) / \left(4 \mathbf{m} \sqrt{\mathbf{d}^2 + \mathbf{x1}^2 + \mathbf{x3}^2 - \mathbf{d} \left(\mathbf{x1} + \sqrt{3} \mathbf{x3} \right)} \right. \\
& \left. \left(\mathbf{A1} \mathbf{L2} \mu \mathbf{\theta} \mu \mathbf{1} + \mathbf{A2} \left(\mathbf{L1} \mu \mathbf{\theta} + \sqrt{\mathbf{d}^2 + \mathbf{x1}^2 + \mathbf{x3}^2 - \mathbf{d} \left(\mathbf{x1} + \sqrt{3} \mathbf{x3} \right)} \mu \mathbf{1} \right) \mu \mathbf{2} \right)^2 \right) \Big\}, \\
& \{ \mathbf{\theta}, \mathbf{\theta}, \mathbf{\theta} \}, \left\{ - \left(\mathbf{NN}^2 \left(\sqrt{3} \mathbf{d} + 2 \mathbf{x3} \right) \right) / \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \mathbf{d}}{2} + \mathbf{x3}\right)^2} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \theta \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \Bigg) + \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d + 2 x3 \right) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \\
& \left(NN^2 \left(\sqrt{3} d - 2 x3 \right) \right) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}d}{2} + x3\right)^2} \mu \theta \right. \\
& \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d - 2 x3 \right) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \\
& - \left(\left(A1 A2^2 NN^2 x3 \beta 13 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(2 m \sqrt{\left(d + x1\right)^2 + x3^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{\left(d + x1\right)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) \right) + \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d + 2 x3 \right) \beta 23 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \left(\sqrt{3} d - 2 x3 \right) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \Bigg\} \}
\end{aligned}$$

In[]:= **Solve**[eq[[2, 3]] == 0, β13]
|resolve

$$\begin{aligned}
\text{Out}[] := & \left\{ \left\{ \beta_{13} \rightarrow \frac{1}{A1 A2^2 NN^2 (d + x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2} \right. \right. \\
& 2 m \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \beta_{23} \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) + \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \left. \right\} \} \\
\text{In}[] := & \beta_{13} = (d \beta_{23} \phi 2[x1, x3] - 2 x1 \beta_{23} \phi 2[x1, x3] + d \phi 3[x1, x3] - 2 x1 \phi 3[x1, x3]) / \\
& (2 (d + x1) \phi 1[x1, x3]);
\end{aligned}$$

$$\text{In}[] := \text{Solve}[\text{eq}[[4, 3]] == 0, \beta_{23}]$$

$$\begin{aligned}
\text{Out}[] := & \left\{ \left\{ \beta_{23} \rightarrow \left(A1 A2^2 d NN^2 x3 \mu \theta \mu 1^2 \left(\frac{\sqrt{(d + x1)^2 + x3^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m (d + x1) \right. \right. \right. \\
& \left. \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 x1 x3 \mu \theta \mu 1^2 \left(\frac{\sqrt{(d + x1)^2 + x3^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \mu 2^2 \right) / \left(2 m (d + x1) \right. \\
& \left. \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) \left. \right\} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 + \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d - 2 x3) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2} - d (x1 + \sqrt{3} x3) \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2} - d (x1 + \sqrt{3} x3) \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) / \\
& \left(- \left(A1 A2^2 d NN^2 x3 \mu \theta \mu 1^2 \left(\frac{\sqrt{(d + x1)^2 + x3^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m (d + x1) \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) + \right. \\
& \left. \left(A1 A2^2 NN^2 x1 x3 \mu \theta \mu 1^2 \left(\frac{\sqrt{(d + x1)^2 + x3^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \mu 2^2 \right) / \left(2 m (d + x1) \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu 1 \mu 2 \right)^2 \right) + \right. \\
& \left. \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right.
\end{aligned}$$

```

      (A1 L2 μ0 μ1 + A2 (L1 μ0 + √(d² - d x1 + x1² + √3 d x3 + x3²) μ1) μ2)²) } }

In[ ]:= B23 = 
$$\frac{\frac{(\sqrt{3} d - 2 x3) \phi3[x1, x3]}{4 A1 m \mu0} + \frac{d x3 \phi3[x1, x3]}{4 A1 m (d + x1) \mu0} - \frac{x1 x3 \phi3[x1, x3]}{2 A1 m (d + x1) \mu0}}{\frac{d x3 \phi2[x1, x3]}{4 A1 m (d + x1) \mu0} + \frac{x1 x3 \phi2[x1, x3]}{2 A1 m (d + x1) \mu0} + \frac{(\sqrt{3} d + 2 x3) \phi2[x1, x3]}{4 A1 m \mu0}}$$
 // Simplify
      |simplifica

Out[ ]:= 
$$\left( \left( \sqrt{3} d^2 + \sqrt{3} d x1 - d x3 - 4 x1 x3 \right) \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\ \left. \left( A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left( L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) / \\ \left( \left( \sqrt{3} d^2 + 4 x1 x3 + d \left( \sqrt{3} x1 + x3 \right) \right) \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left( x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right. \\ \left. \left( A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left( L1 \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left( x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right)$$


In[ ]:= B13 // Simplify
      |simplifica

Out[ ]:= 
$$\left( \sqrt{3} d (d - 2 x1) \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left( A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 L1 \mu0 \mu2 + A2 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \mu1 \mu2 \right)^2 \right) / \\ \left( \left( \sqrt{3} d^2 + 4 x1 x3 + d \left( \sqrt{3} x1 + x3 \right) \right) \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left( x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right. \\ \left. \left( A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left( L1 \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left( x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right)$$


In[ ]:= Det[β /. {x1 → 0, x3 → 0}] // Simplify
      |determinante |simplifica

Out[ ]:= 1

In[ ]:= eq // Simplify
      |simplifica

Out[ ]:= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

In[ ]:= MatrixRank[gpp]
      |rango matricial

Out[ ]:= 2

Nuevos controles w

```

```
In[ ]:= B.{w1, w2, w3} // Simplify
      |simplifica
```

$$\begin{aligned}
\text{Out[]} = & \left\{ \left(\sqrt{3} \, d \, w3 \, (d - 2 \, x1) \, \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \, L1 \, \mu0 \, \mu2 + A2 \, \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \, \mu1 \, \mu2 \right)^2 \right) / \right. \\
& \left(\left(\sqrt{3} \, d^2 + 4 \, x1 \, x3 + d \, (\sqrt{3} \, x1 + x3) \right) \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right), \\
& w1 + \left(w3 \left(\sqrt{3} \, d^2 + \sqrt{3} \, d \, x1 - d \, x3 - 4 \, x1 \, x3 \right) \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 - d \, x1 + x1^2 + \sqrt{3} \, d \, x3 + x3^2} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) / \\
& \left(\left(\sqrt{3} \, d^2 + 4 \, x1 \, x3 + d \, (\sqrt{3} \, x1 + x3) \right) \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 \, L2 \, \mu0 \, \mu1 + A2 \left(L1 \, \mu0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \, (x1 + \sqrt{3} \, x3)} \, \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right), w2 + w3 \}
\end{aligned}$$

`In[]:= gp = {{gp11, gp12}, {gp21, gp22}, {gp31, gp32}, {gp41, gp42}}`

`Out[]:= {{0, 0}, { (NN^2 (d - 2 x1)) /`

$$\left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu 0 \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right),$$

$$(NN^2 (d - 2 x1)) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) \},$$

$$\{0, 0\}, \left\{ - \left(NN^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \right) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu 0 \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) \right\},$$

$$(NN^2 (\sqrt{3} d - 2 x3)) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) \} \}$$

Cambio de control : $u = \beta(w, w^*) \rightarrow x' = f(x) + g'(x) w$

`In[]:= Dimensions[gp]`

`dimensiones`

`Out[]:= {4, 2}`

DISTRIBUCIONES : $x' = f(x) + g1 v1 + g2 v2$

Cambio nombre :

```

In[ ]:= g = gp;
      g1 = {gp11, gp21, gp31, gp41};
      g2 = {gp12, gp22, gp32, gp42};

In[ ]:= G0 = g
      Dimensions[G0]
      |dimensiones
      MatrixRank[G0]
      |rango matricial
      G0 /. {x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> 0, x4 -> 0} // MatrixRank
      |rango matricial

```

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[*]&= \left\{ \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \left\{ \left(\text{NN}^2 \left(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1} \right) \right) / \right. \right. \\
 &\quad \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2} \right)_{\mu \mathbf{0}} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2}}{\mathbf{A1}_{\mu \mathbf{0}}} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1}_{\mu 1}} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2}_{\mu 2}} \right)^2 \Bigg\}, \\
 &\quad \left(\text{NN}^2 \left(\mathbf{d} - 2 \mathbf{x1} \right) \right) / \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2} \right)_{\mu \mathbf{0}} \\
 &\quad \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2}}{\mathbf{A1}_{\mu \mathbf{0}}} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1}_{\mu 1}} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2}_{\mu 2}} \right)^2 \Bigg\}, \\
 &\quad \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \left\{ - \left(\text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \mathbf{d} + 2 \mathbf{x3} \right) \right) / \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2} \right)_{\mu \mathbf{0}} \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2}}{\mathbf{A1}_{\mu \mathbf{0}}} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1}_{\mu 1}} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2}_{\mu 2}} \right)^2 \right) \Bigg\}, \\
 &\quad \left(\text{NN}^2 \left(\sqrt{3} \mathbf{d} - 2 \mathbf{x3} \right) \right) / \left(4 \mathbf{A1} \mathbf{m} \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2} \right)_{\mu \mathbf{0}} \\
 &\quad \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{\mathbf{d}}{2} + \mathbf{x1} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{d} + \mathbf{x3} \right)^2}}{\mathbf{A1}_{\mu \mathbf{0}}} + \frac{\mathbf{L1}}{\mathbf{A1}_{\mu 1}} + \frac{\mathbf{L2}}{\mathbf{A2}_{\mu 2}} \right)^2 \Bigg\} \Bigg\} \\
 \text{Out}[*]&= \{\mathbf{4}, \mathbf{2}\} \\
 \text{Out}[*]&= \mathbf{2} \\
 \text{Out}[*]&= \mathbf{2} \\
 \text{OK : dim} \left(\mathbf{G0} \right) &= \mathbf{2}
 \end{aligned}$$

```

In[ ]:= adfg1 = D[g1, {{x1, x2, x3, x4}}].f - D[f, {{x1, x2, x3, x4}}].g1 // Simplify
      |_deriva      |_deriva      |_simplifica
adfg2 = D[g2, {{x1, x2, x3, x4}}].f - D[f, {{x1, x2, x3, x4}}].g2 // Simplify
      |_deriva      |_deriva      |_simplifica

```

$$\begin{aligned}
Out[4]= & \left\{ - \left(\left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right) \right\}, \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \left(- (d - 2 x1) \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right) x4 \right. \right. \\
& \left. \left(2 A2 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^{3/2} \mu1 \mu2 + (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2) \right. \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right) \right) + \\
& x2 \left(A2 (d - 2 x1)^2 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^{3/2} \mu1 \mu2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} (d - 2 x1)^2 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2) \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right) - 2 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^2 \\
& \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right) \right) \right) \Bigg\} / \\
& \left(4 m (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^{5/2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^3 \right), \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \right) / \\
& \left(4 m \right. \\
& \left. \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^2 \right), \\
& \left(A1 A2^2 NN^2 \mu0 \mu1^2 \mu2^2 \left(- (d - 2 x1) x2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \right. \right. \\
& \left. \left(2 A2 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^{3/2} \mu1 \mu2 + (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2) \right. \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right) \right) + \\
& x4 \left(2 A2 (\sqrt{3} d + 2 x3)^2 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^{3/2} \mu1 \mu2 + \right. \\
& \left. (\sqrt{3} d + 2 x3)^2 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2) \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right) - 4 (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^2 \\
& \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right) \right) \right) \Bigg\} / \\
& \left(8 m (d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2)^{5/2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu0 \mu1 + A2 \left(L1 \mu0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu1 \right) \mu2 \right)^3 \right) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Out[4]= & \left\{ - \left(A1 A2^2 NN^2 (d - 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right\}, \\
& \left(A1 NN^2 \mu \theta \left(A2^2 (d - 2 x1) \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} - x3 \right) x4 \mu 1^2 \mu 2^2 \right. \right. \\
& \left. \left(2 A2 (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3))^{3/2} \mu 1 \mu 2 + (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)) \right. \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right) \right) \right) + \\
& A2^2 x2 \mu 1^2 \mu 2^2 \left(A2 (d - 2 x1)^2 (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3))^{3/2} \mu 1 \mu 2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} (d - 2 x1)^2 (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)) \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right) \right) - \\
& 2 (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3))^2 \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right) \right) \right) \Bigg) / \\
& \left(4 m (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3))^{5/2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^3 \right), \\
& - \left(A1 A2^2 NN^2 (\sqrt{3} d - 2 x3) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \\
& \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right), \\
& \left(A1 NN^2 \mu \theta \left(\frac{1}{2} A2^2 (d - 2 x1) x2 (\sqrt{3} d - 2 x3) \mu 1^2 \mu 2^2 \right. \right. \\
& \left. \left(2 A2 (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3))^{3/2} \mu 1 \mu 2 + (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)) \right. \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right) \right) \right) + \\
& A2^2 x4 \mu 1^2 \mu 2^2 \left(A2 (\sqrt{3} d - 2 x3)^2 (d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3))^{3/2} \mu 1 \mu 2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right) \right)^2 \\
& \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right) - \\
& \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} d - 2 x3 \right)^2 \left(-d^2 - x1^2 - x3^2 + d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right) \right) \\
& \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right) \Big) \Big) \Big) \Big) / \\
& \left(4 m \left(d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right) \right)^{5/2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^3 \right) \Big\}
\end{aligned}$$

```

In[ ]:= G1 = {g1, g2, adfg1, adfg2};
Dimensions[G1]
[dimensiones]
MatrixRank[G1]
[rango matricial]
G1 /. {x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> 0, x4 -> 0} // MatrixRank
[rango matricial]

Out[ ]:= {4, 4}

Out[ ]:= 4

Out[ ]:= 4

OK : dim (G1) = 4

In[ ]:= ad2fg1 = D[adfg1, {{x1, x2, x3, x4}}].f - D[f, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg1;
[deriva] [deriva]
ad2fg2 = D[adfg2, {{x1, x2, x3, x4}}].f - D[f, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg2;
[deriva] [deriva]

In[ ]:= G2 = {g1, g2, adfg1, adfg2, ad2fg1, ad2fg2};
Dimensions[G2]
[dimensiones]
MatrixRank[G2]
[rango matricial]
G2 /. {x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> 0, x4 -> 0} // MatrixRank
[rango matricial]

Out[ ]:= {6, 4}

Out[ ]:= 4

Out[ ]:= 4

OK : dim (G2) = 4

In[ ]:= ad3fg1 = D[ad2fg1, {{x1, x2, x3, x4}}].f - D[f, {{x1, x2, x3, x4}}].ad2fg1;
[deriva] [deriva]
ad3fg2 = D[ad2fg2, {{x1, x2, x3, x4}}].f - D[f, {{x1, x2, x3, x4}}].ad2fg2;
[deriva] [deriva]

```

```

In[ ]:= G3 = {g1, g2, adfg1, adfg2, ad2fg1, ad2fg2, ad3fg1, ad3fg2};
Dimensions[G3]
dimensiones

MatrixRank[G3]
rango matricial

G3 /. {x1 → 0, x2 → 0, x3 → 0, x4 → 0} // MatrixRank
rango matricial

Out[ ]:= {8, 4}

Out[ ]:= 4

Out[ ]:= 4

OK : dim (G3) = 4
-----

Veamos que la distribución G0 = span {g1, g2} es involutiva :

In[ ]:= adg1g2 = D[g2, {{x1, x2, x3, x4}}].g1 - D[g1, {{x1, x2, x3, x4}}].g2 // Simplify
deriva deriva simplifica

Out[ ]:= {0, 0, 0, 0}

Luego trivialmente G0 es involutiva

In[ ]:= MatrixRank[G0]
rango matricial

Out[ ]:= 2

In[ ]:= Mat0 = MatrixRank[{g1, g2, adg1g2} /. {x1 → 0, x2 → 0, x3 → 0, x4 → 0}]
rango matricial

Out[ ]:= 2

Veamos que la distribución G1 = {g1, g2, adfg1, adfg2} es involutiva :

In[ ]:= adg1adfg1 = D[adfg1, {{x1, x2, x3, x4}}].g1 - D[g1, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg1;
deriva deriva

adg1adfg2 = D[adfg2, {{x1, x2, x3, x4}}].g1 - D[g1, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg2;
deriva deriva

adg2adfg1 = D[adfg1, {{x1, x2, x3, x4}}].g2 - D[g2, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg1;
deriva deriva

adg2adfg2 = D[adfg2, {{x1, x2, x3, x4}}].g2 - D[g2, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg2;
deriva deriva

adfg1adfg2 = D[adfg2, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg1 - D[adfg1, {{x1, x2, x3, x4}}].adfg2;
deriva deriva

In[ ]:= Dimensions[G1]
dimensiones

MatrixRank[G1]
rango matricial

MatrixRank[G1 /. {x1 → 0, x2 → 0, x3 → 0, x4 → 0}]
rango matricial

Out[ ]:= {4, 4}

Out[ ]:= 4

Out[ ]:= 4

```

NOTA : A partir de aquí es obvio que G_1 y G_2 son involutivas
 pues el rango de las matrices que construiremos será siempre 4. El motivo
 es que G_{i+1} está incluido en G_i (por definición) y $\dim(G_2) =$
 $n = 4$ (la dimensión del espacio de estados) con lo que $G_2 =$
 G_1 y por lo tanto G_2 es trivialmente involutivo.

```
In[ ]:= Mat1 = MatrixRank[{g1, g2, adfg1, adfg2, adg1g2, adg1adfg1, adg1adfg2,
  rango matricial
  adg2adfg1, adg2adfg2, adfg1adfg2} /. {x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> 0, x4 -> 0}]

Out[ ]:= 4
```

Veamos que la distribución $G_2 = \{g_1, g_2, adfg_1, adfg_2, ad2fg_1, ad2fg_2\}$ es involutiva :

```
In[ ]:= MatrixRank[G2]
  rango matricial

Out[ ]:= 4

In[ ]:= MatrixRank[G2 /. {x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> 0, x4 -> 0}]
  rango matricial

Out[ ]:= 4
```

-----CALCULO DEL CAMBIO DE VARIABLE QUE LINEARIZA :

Sean h_1 y h_2 integrales comunes primeras de ambos campos g_1 y g_2 :

$ln[\sigma] = \mathbf{g}$

$Out[\sigma] = \{ \{ \emptyset, \emptyset \}, \{ (NN^2 (d - 2 x1)) /$

$$\left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \emptyset \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \emptyset} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right),$$

$$(NN^2 (d - 2 x1)) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \emptyset$$

$$\left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \emptyset} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \Bigg\},$$

$$\{ \emptyset, \emptyset \}, \left\{ - \left(NN^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \right) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \emptyset \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \emptyset} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) \right\},$$

$$(NN^2 (\sqrt{3} d - 2 x3)) / \left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \emptyset$$

$$\left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \emptyset} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \Bigg\} \Bigg\}$$

In[]:= **g1**
g2

Out[]:= $\left\{0, \left(NN^2 (d - 2 x1)\right)\right\}$

$$\left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \theta \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2}\right)^2\right),$$

$$0, - \left(NN^2 (\sqrt{3} d + 2 x3)\right) \Bigg\}$$

$$\left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \theta \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2}\right)^2\right) \Bigg\}$$

Out[]:= $\left\{0, \left(NN^2 (d - 2 x1)\right)\right\}$

$$\left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \theta \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2}\right)^2\right),$$

$$0, \left(NN^2 (\sqrt{3} d - 2 x3)\right) \Bigg\}$$

$$\left(4 A1 m \sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2} \mu \theta \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2}\right)^2\right) \Bigg\}$$

In[]:= **DSolve**[**D**[**h1**[**x1**, **x2**, **x3**, **x4**], **x1**] **g1**[**[1]**] + **D**[**h1**[**x1**, **x2**, **x3**, **x4**], **x2**] **g1**[**[2]**] +
[**resolv...**] [**deriva**]
D[**h1**[**x1**, **x2**, **x3**, **x4**], **x3**] **g1**[**[3]**] + **D**[**h1**[**x1**, **x2**, **x3**, **x4**], **x4**] **g1**[**[4]**] == **0**,
[**deriva**] [**deriva**]
h1[**x1**, **x2**, **x3**, **x4**], {**x1**, **x2**, **x3**, **x4**}]

Out[]:= $\left\{\left\{h1[x1, x2, x3, x4] \rightarrow C[1][x1, x3] \left[\frac{\sqrt{3} d x2 + 2 x2 x3 + d x4 - 2 x1 x4}{d - 2 x1}\right]\right\}\right\}$

In[]:= **h1**[**x1_**, **x2_**, **x3_**, **x4_**] = **H1**[**x1**, **x3**]

Out[]:= **H1**[**x1**, **x3**]

```
In[ ]:= Simplify[D[h1[x1, x2, x3, x4], x1] g2[[1]] + D[h1[x1, x2, x3, x4], x2] g2[[2]] +
  D[h1[x1, x2, x3, x4], x3] g2[[3]] + D[h1[x1, x2, x3, x4], x4] g2[[4]]]
```

```
Out[ ]:= 0
```

```
In[ ]:= DSolve[D[h2[x1, x2, x3, x4], x1] g1[[1]] + D[h2[x1, x2, x3, x4], x2] g1[[2]] +
  D[h2[x1, x2, x3, x4], x3] g1[[3]] + D[h2[x1, x2, x3, x4], x4] g1[[4]] == 0,
  h2[x1, x2, x3, x4], {x1, x2, x3, x4}]
```

```
Out[ ]:= {{h2[x1, x2, x3, x4] -> C[1][x1, x3] \[LeftBracketingBar] \frac{\sqrt{3} d x2 + 2 x2 x3 + d x4 - 2 x1 x4}{d - 2 x1} \[RightBracketingBar]}}
```

```
In[ ]:= h2[x1_, x2_, x3_, x4_] = H2[x1, x3]
```

```
Out[ ]:= H2[x1, x3]
```

```
In[ ]:= Simplify[D[h2[x1, x2, x3, x4], x1] g2[[1]] + D[h2[x1, x2, x3, x4], x2] g2[[2]] +
  D[h2[x1, x2, x3, x4], x3] g2[[3]] + D[h2[x1, x2, x3, x4], x4] g2[[4]]]
```

```
Out[ ]:= 0
```

Calculo de la matriz A

```
In[ ]:= Lfh1 = D[h1[x1, x2, x3, x4], {{x1, x2, x3, x4}}] . f // Simplify
```

```
Lg1Lfh1 = D[Lfh1, {{x1, x2, x3, x4}}] . g1 // Simplify
```

```
Lg2Lfh1 = D[Lfh1, {{x1, x2, x3, x4}}] . g2 // Simplify
```

```
Out[ ]:= x4 H1(0,1)[x1, x3] + x2 H1(1,0)[x1, x3]
```

```
Out[ ]:= - \left( \left( A1 A2^2 N N^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \left( \left( \sqrt{3} d + 2 x3 \right) H1^{(0,1)}[x1, x3] - \left( d - 2 x1 \right) H1^{(1,0)}[x1, x3] \right) \right) / \right. \\ \left. \left( 4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right. \\ \left. \left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right)
```

```
Out[ ]:= \left( A1 A2^2 N N^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \left( \left( \sqrt{3} d - 2 x3 \right) H1^{(0,1)}[x1, x3] + \left( d - 2 x1 \right) H1^{(1,0)}[x1, x3] \right) \right) / \\ \left( 4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left( x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right. \\ \left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left( x1 + \sqrt{3} x3 \right) \mu 1} \right) \mu 2 \right)^2 \right)
```

```

In[ ]:= Lfh2 = D[h2[x1, x2, x3, x4], {{x1, x2, x3, x4}}].f // Simplify
      [deriva] [simplifica]
Lg1Lfh2 = D[Lfh2, {{x1, x2, x3, x4}}].g1 // Simplify
      [deriva] [simplifica]
Lg2Lfh2 = D[Lfh2, {{x1, x2, x3, x4}}].g2 // Simplify
      [deriva] [simplifica]
Out[ ]:= x4 H2(0,1)[x1, x3] + x2 H2(1,0)[x1, x3]

Out[ ]:= -  $\left( \left( A1 A2^2 N N^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \left( \left( \sqrt{3} d + 2 x3 \right) H2^{(0,1)}[x1, x3] - (d - 2 x1) H2^{(1,0)}[x1, x3] \right) \right) / \right.$ 
 $\left( 4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right.$ 
 $\left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right)$ 

Out[ ]:=  $\left( A1 A2^2 N N^2 \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \left( \left( \sqrt{3} d - 2 x3 \right) H2^{(0,1)}[x1, x3] + (d - 2 x1) H2^{(1,0)}[x1, x3] \right) \right) /$ 
 $\left( 4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right.$ 
 $\left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right)$ 

In[ ]:= A = {{Lg1Lfh1, Lg2Lfh1}, {Lg1Lfh2, Lg2Lfh2}}
Out[ ]:= { { -  $\left( \left( A1 A2^2 N N^2 (-d + 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left( 4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right.$ 
 $\left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right)$ ,
 $\left( A1 A2^2 N N^2 (d - 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left( 4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right.$ 
 $\left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right)$ ,
 $\left\{ - \left( \left( A1 A2^2 N N^2 \left( \sqrt{3} d + 2 x3 \right) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left( 4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right. \right.$ 
 $\left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right)$ ,
 $\left( A1 A2^2 N N^2 \left( \sqrt{3} d - 2 x3 \right) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left( 4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right.$ 
 $\left. \left( A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left( L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right\} \}$ 

Tomamos por simplicidad :
In[ ]:= H1[x1_, x3_] = x1; H2[x1_, x3_] = x3;

```

In[]:= **Det**[A /. {x1 → 0, x2 → 0, x3 → 0, x4 → 0}] // **Factor**
[determinante [factoriza

$$\text{Out[]} = \frac{\sqrt{3} A1^2 A2^4 N N^4 \mu \theta^2 \mu 1^4 \mu 2^4}{8 m^2 \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 L1 \mu \theta \mu 2 + A2 \sqrt{d^2} \mu 1 \mu 2 \right)^4}$$

Ahora calculo el cambio $x \rightarrow z = \tilde{x}(x)$, y el control $w \rightarrow v$ con $w = \alpha + \beta v$

In[]:= $\tilde{x} = \{h1[x1, x2, x3, x4], Lfh1, h2[x1, x2, x3, x4], Lfh2\}$

Out[]:= {x1, x2, x3, x4}

CURIOSO ! No hay cambio.

In[]:= **L2fh1** = **D**[**Lfh1**, {{x1, x2, x3, x4}}].f // **Simplify**
[deriva [simplifica

L2fh2 = **D**[**Lfh2**, {{x1, x2, x3, x4}}].f // **Simplify**
[deriva [simplifica

Out[]:= 0

Out[]:= 0

Luego $\alpha(x) = 0$.

In[]:= **A** // **Simplify**
[simplifica

$$\begin{aligned} \text{Out[]} = & \left\{ \left\{ \left(A1 A2^2 N N^2 (d - 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), \right. \\ & \left. \left(A1 A2^2 N N^2 (d - 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \right. \\ & \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right\}, \\ & \left\{ - \left(\left(A1 A2^2 N N^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right), \right. \\ & \left. \left(A1 A2^2 N N^2 (\sqrt{3} d - 2 x3) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \right. \\ & \left. \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

```

In[ ]:= Ainv = Inverse[A] // FullSimplify
      [matriz inversa] [simplifica complet]

Out[ ]:= {{ { 2 m (sqrt(3) d - 2 x3) sqrt(d^2 - d x1 + x1^2 + sqrt(3) d x3 + x3^2)
              (A1 L2 mu0 mu1 + A2 (L1 mu0 + sqrt(d^2 - d x1 + x1^2 + sqrt(3) d x3 + x3^2) mu1) mu2)^2 } /
              (sqrt(3) A1 A2^2 d NN^2 (d - 2 x1) mu0 mu1^2 mu2^2), - { 2 m sqrt(d^2 - d x1 + x1^2 + sqrt(3) d x3 + x3^2)
              (A1 L2 mu0 mu1 + A2 (L1 mu0 + sqrt(d^2 - d x1 + x1^2 + sqrt(3) d x3 + x3^2) mu1) mu2)^2 } /
              (sqrt(3) A1 A2^2 d NN^2 mu0 mu1^2 mu2^2) } }, { 2 m (sqrt(3) d + 2 x3) sqrt(d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + sqrt(3) x3)
              (A1 L2 mu0 mu1 + A2 (L1 mu0 + sqrt(d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + sqrt(3) x3) mu1) mu2)^2 } /
              (sqrt(3) A1 A2^2 d NN^2 (d - 2 x1) mu0 mu1^2 mu2^2), { 2 m sqrt(d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + sqrt(3) x3)
              (A1 L2 mu0 mu1 + A2 (L1 mu0 + sqrt(d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + sqrt(3) x3) mu1) mu2)^2 } /
              (sqrt(3) A1 A2^2 d NN^2 mu0 mu1^2 mu2^2) } } }

-----

RESUMEN :

Sistema inicial :

In[ ]:= xp1
      xp2
      xp3
      xp4

Out[ ]:= x2

```

$$\begin{aligned}
Out[] = & -\frac{1}{2 A1 m \mu \theta} \left(\frac{NN^2 u1 (d + x1)}{\sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(\frac{\sqrt{(d+x1)^2 + x3^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2} + \right. \\
& \left(NN^2 u3 \left(-\frac{d}{2} + x1 \right) \right) / \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2} \right. \\
& \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) + \left(NN^2 u2 \left(-\frac{d}{2} + x1 \right) \right) / \\
& \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2} \right) \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \Bigg)
\end{aligned}$$

Out[] = x4

$$\begin{aligned}
Out[] = & -\frac{1}{2 A1 m \mu \theta} \left(-\frac{NN^2 u1 x3}{\sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \left(\frac{\sqrt{(d+x1)^2 + x3^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2} + \right. \\
& \left(NN^2 u3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right) \right) / \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2} \right. \\
& \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) + \left(NN^2 u2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right) \right) / \\
& \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2} \right) \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d + x3 \right)^2}}{A1 \mu \theta} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \Bigg)
\end{aligned}$$

Cambio de control : $(u1, u2, u3) = \beta (w1, w2, w3)$

In[] = $\{u1, u2, u3\} = \beta . \{w1, w2, w3\}$

$$Out[] = \left\{ \frac{1}{2 NN^2 (d + x1)} w3 \sqrt{(d + x1)^2 + x3^2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2} + x1\right)^2 + x3^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \left((d \text{ NN}^2) / \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} + x3\right)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 - (2 \text{ NN}^2 x1) / \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} + x3\right)^2} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right) \right) + \\
& \left(d \text{ NN}^2 \left(\sqrt{3} d^2 + \sqrt{3} d x1 - d x3 - 4 x1 x3 \right) \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) / \\
& \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} + x3\right)^2} \left(\sqrt{3} d^2 + 4 x1 x3 + d \left(\sqrt{3} x1 + x3 \right) \right) \right. \\
& \left. \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} + x3\right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) - \\
& \left(2 \text{ NN}^2 x1 \left(\sqrt{3} d^2 + \sqrt{3} d x1 - d x3 - 4 x1 x3 \right) \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) / \\
& \left(\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} d}{2} + x3\right)^2} \left(\sqrt{3} d^2 + 4 x1 x3 + d \left(\sqrt{3} x1 + x3 \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \left(\frac{\sqrt{\left(-\frac{d}{2} + x1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} d}{2} + x3 \right)^2}}{A1 \mu 0} + \frac{L1}{A1 \mu 1} + \frac{L2}{A2 \mu 2} \right)^2 \\
& \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \Bigg) \Bigg) , \\
& w1 + \left(w3 \left(\sqrt{3} d^2 + \sqrt{3} d x1 - d x3 - 4 x1 x3 \right) \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \\
& \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) / \\
& \left(\sqrt{3} d^2 + 4 x1 x3 + d \left(\sqrt{3} x1 + x3 \right) \right) \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \\
& \left. \left(A1 L2 \mu 0 \mu 1 + A2 \left(L1 \mu 0 + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) , w2 + w3 \} \\
\text{In[]:= } & \text{ff} = \{ \text{xp1}, \text{xp2}, \text{xp3}, \text{xp4} \} /. \{ w1 \rightarrow 0, w2 \rightarrow 0, w3 \rightarrow 0 \} \\
\text{Out[]:= } & \{ x2, 0, x4, 0 \} \\
\text{In[]:= } & \{ \text{xp1}, \text{xp2}, \text{xp3}, \text{xp4} \} // \text{Simplify} \\
& \text{[simplifica]} \\
\text{Out[]:= } & \{ x2, \left(A1 A2^2 N N^2 \left(d - 2 x1 \right) \mu 0 \mu 1^2 \mu 2^2 \right. \\
& \left(A1^2 L2^2 \left(w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} + w1 \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right) \mu 0^2 \mu 1^2 + \right. \\
& 2 A1 A2 L2 \mu 0 \mu 1 \\
& \left. \left(L1 \left(w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} + w1 \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right) \mu 0 + \right. \\
& \left. \left(d^2 \left(w1 + w2 \right) - d \left(w1 x1 + w2 x1 + \sqrt{3} w1 x3 - \sqrt{3} w2 x3 \right) + \left(w1 + w2 \right) \left(x1^2 + x3^2 \right) \right) \mu 1 \right) \mu 2 + \\
& A2^2 \left(L1^2 \left(w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} + w1 \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right) \mu 0^2 + \right. \\
& 2 L1 \left(d^2 \left(w1 + w2 \right) - d \left(w1 x1 + w2 x1 + \sqrt{3} w1 x3 - \sqrt{3} w2 x3 \right) + \left(w1 + w2 \right) \left(x1^2 + x3^2 \right) \right) \mu 0 \\
& \mu 1 + \left(d^2 \left(w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} + w1 \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right) + \right. \\
& \left. \left(x1^2 + x3^2 \right) \left(w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} + w1 \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d \left(x1 + \sqrt{3} x3 \right)} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d \left(w_2 \left(x_1 - \sqrt{3} x_3 \right) \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} + w_1 \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right) \right. \\
& \quad \left. \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right) \mu_1^2 \mu_2^2 \Bigg) \Bigg/ \\
& \left(4 m \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right. \\
& \quad \left(A_1 L_2 \mu \mu_1 + A_2 \left(L_1 \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2 \\
& \quad \left. \left(A_1 L_2 \mu \mu_1 + A_2 \left(L_1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \mu_1 \right) \mu_2 \right)^2 \right), \\
x_4, & - \left(A_1 A_2^2 N N^2 \mu \theta \mu_1^2 \mu_2^2 \left(A_1^2 L_2^2 \right. \right. \\
& \quad \left(\sqrt{3} d \left(-w_2 \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} + w_1 \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right) + \right. \\
& \quad \left. 2 x_3 \left(w_2 \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} + w_1 \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right) \right) \\
& \quad \mu \theta^2 \mu_1^2 + 2 A_1 A_2 L_2 \mu \theta \mu_1 \left(\sqrt{3} d^3 (w_1 - w_2) \mu_1 - \right. \\
& \quad \left. d^2 \left(w_2 \left(-\sqrt{3} x_1 + x_3 \right) + w_1 \left(\sqrt{3} x_1 + x_3 \right) \right) \mu_1 + \right. \\
& \quad \left. 2 x_3 \left(L_1 \left(w_2 \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} + w_1 \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \mu \theta + (w_1 + w_2) (x_1^2 + x_3^2) \mu_1 \right) + d \left(\sqrt{3} L_1 \left(-w_2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} + w_1 \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right) \right) \mu \theta + \\
& \quad \left. w_1 \left(\sqrt{3} x_1^2 - 2 x_1 x_3 - \sqrt{3} x_3^2 \right) \mu_1 + w_2 \left(-\sqrt{3} x_1^2 - 2 x_1 x_3 + \sqrt{3} x_3^2 \right) \mu_1 \right) \Bigg) \mu_2 + \\
A_2^2 & \left(\sqrt{3} d^3 \mu_1 \left(2 L_1 w_1 \mu \theta - 2 L_1 w_2 \mu \theta - w_2 \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} \mu_1 + \right. \right. \\
& \quad \left. w_1 \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \mu_1 \right) - d^2 \mu_1 \left(2 L_1 \left(w_2 \left(-\sqrt{3} x_1 + x_3 \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. w_1 \left(\sqrt{3} x_1 + x_3 \right) \right) \mu \theta + \left(w_2 \left(-\sqrt{3} x_1 + x_3 \right) \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. w_1 \left(\sqrt{3} x_1 + x_3 \right) \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right) \mu_1 \right) + 2 x_3 \\
& \quad \left(L_1^2 \left(w_2 \sqrt{d^2 - d x_1 + x_1^2 + \sqrt{3} d x_3 + x_3^2} + w_1 \sqrt{d^2 + x_1^2 + x_3^2 - d \left(x_1 + \sqrt{3} x_3 \right)} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \theta^2 + 2 \text{L1} (w1 + w2) (x1^2 + x3^2) \mu \theta \mu 1 + (x1^2 + x3^2) \\
& \left(w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} + w1 \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right) \\
& \mu 1^2 + d \left(\sqrt{3} \text{L1}^2 \left(-w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. w1 \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right) \mu \theta^2 + \right. \\
& 2 \text{L1} (w1 (\sqrt{3} x1^2 - 2 x1 x3 - \sqrt{3} x3^2) + w2 (-\sqrt{3} x1^2 - 2 x1 x3 + \sqrt{3} x3^2)) \mu \theta \mu 1 + \\
& \left(w2 \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} (-\sqrt{3} x1^2 - 2 x1 x3 + \sqrt{3} x3^2) + w1 (\sqrt{3} \right. \\
& \left. x1^2 - 2 x1 x3 - \sqrt{3} x3^2) \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right) \mu 1^2 \left. \right) \mu 2^2 \left. \right) \Bigg) / \\
& \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right. \\
& \left(A1 \text{L2} \mu \theta \mu 1 + A2 \left(\text{L1} \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \\
& \left. \left(A1 \text{L2} \mu \theta \mu 1 + A2 \left(\text{L1} \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \Bigg) \Bigg\} \\
\text{In[]:= } & \text{gg1} = (\{xp1, xp2, xp3, xp4\} - ff) / w1 /. \{w2 \rightarrow \theta, w3 \rightarrow \theta\} // \text{Expand} // \text{Simplify} \\
& \text{gg2} = (\{xp1, xp2, xp3, xp4\} - ff) / w2 /. \{w1 \rightarrow \theta, w3 \rightarrow \theta\} // \text{Expand} // \text{Simplify} \\
& \text{gg3} = (\{xp1, xp2, xp3, xp4\} - ff) / w3 /. \{w1 \rightarrow \theta, w2 \rightarrow \theta\} // \text{Expand} // \text{Simplify} \\
\text{Out[]:= } & \{0, (A1 A2^2 \text{NN}^2 (d - 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right. \\
& \left. \left(A1 \text{L2} \mu \theta \mu 1 + A2 \left(\text{L1} \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right), 0, \\
& - \left((A1 A2^2 \text{NN}^2 (\sqrt{3} d + 2 x3) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2) / \left(4 m \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(A1 \text{L2} \mu \theta \mu 1 + A2 \left(\text{L1} \mu \theta + \sqrt{d^2 - d x1 + x1^2 + \sqrt{3} d x3 + x3^2} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right) \right) \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[*]:= & \left\{ \theta, \left(A1 A2^2 N N^2 (d - 2 x1) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right) \right. \\ & \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right\}, \theta, \\ & \left(A1 A2^2 N N^2 (\sqrt{3} d - 2 x3) \mu \theta \mu 1^2 \mu 2^2 \right) / \left(4 m \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \right) \\ & \left. \left(A1 L2 \mu \theta \mu 1 + A2 \left(L1 \mu \theta + \sqrt{d^2 + x1^2 + x3^2 - d (x1 + \sqrt{3} x3)} \mu 1 \right) \mu 2 \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Out[*]:= {0, 0, 0, 0}

In[*]:= {xp1, xp2, xp3, xp4} - (ff + w1 gg1 + w2 gg2 + w3 gg3) // Simplify
|simplifica

Out[*]:= {0, 0, 0, 0}

Nuevo cambio de control :

In[*]:= {w1, w2} = Ainv.{v1, v2};

El sistema lineal queda :

In[*]:= {xp1, xp2, xp3, xp4} // Chop // FullSimplify
|cambia...|simplifica completamente

Out[*]:= {x2, v1, x4, v2}

Tenemos w3, β_{ij} LIBRES.

In[*]:= u1 // Chop // Simplify
|cambia...|simplifica

u2 // Chop // Simplify
|cambia...|simplifica

u3 // Chop // Simplify
|cambia...|simplifica

$$\text{Out}[*]:= \frac{\sqrt{3} d w3 (d - 2 x1) \phi 3[x1, x3]}{\left(\sqrt{3} d^2 + 4 x1 x3 + d (\sqrt{3} x1 + x3) \right) \phi 1[x1, x3]}$$

$$\text{Out}[*]:= \frac{1}{3 \phi 2[x1, x3]} \left(-\frac{2 \sqrt{3} A1 m v2 \mu \theta}{d} + \frac{2 A1 m v1 (3 d - 2 \sqrt{3} x3) \mu \theta}{d (d - 2 x1)} + \frac{3 w3 (\sqrt{3} d^2 + \sqrt{3} d x1 - d x3 - 4 x1 x3) \phi 3[x1, x3]}{\sqrt{3} d^2 + 4 x1 x3 + d (\sqrt{3} x1 + x3)} \right)$$

$$\text{Out}[*]:= w3 + \frac{2 A1 m (d (3 v1 + \sqrt{3} v2) + 2 \sqrt{3} (-v2 x1 + v1 x3)) \mu \theta}{3 d (d - 2 x1) \phi 3[x1, x3]}$$
